Systeme, Filter, Approximationsfunktionen

Revision : 262

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\measuredangle s$	Winkel von s
$\omega_{\times}^{(D)}$	Pol von $D(\omega)$
$\omega_{\circ}^{(D)}$	Nullstelle von $D(\omega)$
$\lvert s \rvert$	Betrag von s
$A(\omega)$	Dämpfung
$\arccos(x)$	Arcus Cosinus
$\operatorname{arcosh}(x)$	Area Cosinus Hyperbolicus
$\exp(x)$	Exponentialfunktion
$\arctan(x)$	Arcus Tangens
$B(\omega)$	Phase
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen
$\cos(x)$	Cosinus
$\operatorname{cosec}(x)$	Cosekans ($\operatorname{cosec} x = \sin^{-1} x$)
$\cosh(x)$	Cosinus Hyperbolicus
$D(\omega)$	Drosselung
$\frac{\mathrm{d} f(z)}{\mathrm{d} z}$	Ableitung der Funktion $f(z)$ nach z
$\mathrm{E}(\varphi; k)$	Unvollständiges ell. Integral zweiter Art (Legendre'sche Normalform)
$\mathrm{F}(\varphi; k)$	Unvollständiges ell. Integral erster Art (Legendre'sche Normalform)

$\underset{\star}{\mathrm{F}}(x;k)$	Unvollständiges ell. Integral erster Art (JACOBI-Form)
$\mathcal{F}$	FOURIER-Transformation
$\mathcal{F}^{-1}$	FOURIER-Rücktransformation
$gd(x)$	GUDERMANN-Funktion ($\operatorname{gd} x = \arctan(\sinh x)$)
$H(\mathrm{j}\omega)$	(Komplexe) Übertragungsfunktion im $\mathcal{F}$-Bildbereich
$H(\omega)$	Betrag der Übertragungsfunktion im $\mathcal{F}$-Bildbereich
$H(s)$	(Komplexe) Übertragungsfunktion im $\mathcal{L}$-Bildbereich
$h(t)$	Impulsantwort
$\mathcal{H}$	HILBERT-Transformation
$\mathrm{Im}(z)$	Imaginärteil von z
$\mathrm{K}(k)$	Vollständiges ell. Integral erster Art
$\mathcal{L}$	LAPLACE-Transformation
$\mathcal{L}^{-1}$	LAPLACE-Rücktransformation
$\Pi(\varphi;k;n)$	Unvollständiges ell. Integral dritter Art (LEGENDRE'sche Normalform)
$\mathrm{Re}(z)$	Realteil von z
$\mathrm{r}(t)$	Rechteckfunktion
$\mathrm{res}_{z_0} f(z)$	Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0
s	LAPLACE-Variable $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$
$\mathrm{s}(t)$	Einheitssprung (HEAVISIDE-Funktion)
$\underset{\circ}{s}$	Nullstelle einer Funktion von s
$\sec(x)$	Sekans ($\sec x = \cos^{-1} x$)
$\sin(x)$	Sinus
$\mathrm{sinc}(z)$	Spaltfunktion (Sinus Cardinalis)

$\mathrm{sn}(u; k)$	Elliptischer Sinus
$\underset{\times}{s}$	Pol einer Funktion von s
$\tan(x)$	Tangens
T_n	TSCHEBYSCHEFF-Funktion erster Art der Ordnung n
V. P.	CAUCHY-Hauptwert (Valor Principalis)
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen

Intention

Vorliegendes Werk soll dem Ingenieur z. B. der Elektrotechnik, Nachrichtentechnik oder Signalverarbeitung die Grundlagen der konventionellen (analogen) Filterapproximationen nahebringen. Mit etwas mehr Ausführlichkeit als bei anderen Publikationen zu dieser Thematik wird versucht, auch die mathematischen Hintergründe zu vermitteln und dadurch etwas mehr Verständnis für die Zusammenhänge zu erreichen[1]. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei der Verbindung zur Tschebyscheff'schen Approximationstheorie, der Funktionentheorie sowie Jacobi's elliptischen Funktionen geschenkt. Ausgehend von den Eigenschaften zeit- sowie wertkontinuierlicher LTI-Systeme werden die bekanntesten (realisierbaren) Standard-Tiefpaßfilter erörtert. Dabei sind es insbesondere Forderungen an den Amplitudengang, welche im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen. Abschließend wird die Transformation der Übertragungsfunktion in andere Frequenzbereiche bzw. Filtertypen, wie Hochpaß, Bandpaß oder Bandsperre behandelt. Zahlreiche Anhänge sind von ihrer Ausführlichkeit so gestaltet, daß eine Einarbeitung in die mathematischen Grundlagen ermöglicht wird.

Approximationsvorschriften im Zeitbereich, numerische Verfahren sowie die Näherung von anderen charakteristischen Größen, wie der Gruppenlaufzeit oder des Phasengangs, werden bei den Betrachtungen fast vollständig ausgespart[2]. Ebenfalls nicht behandelt (und außerdem vorausgesetzt) werden die Grundlagen der Fourier-Analyse, für welche es sehr gute Literatur gibt [Ben55, Pap62, Küp68, Fri85, Kör88, Mar95, Bra03].

[1] Wobei der Lesende selbst darüber entscheiden kann, wie stark er sich von der Thematik einfangen läßt.

[2] Approximationen im Zeitbereich (bzw. das dortige Verhalten der Standard-Tiefpaßfilter) werden z. B. in [Gui52, Hli54, Kau54, Gui57, Gum58, Zve67] untersucht.

1. LTI-Systeme

1.1. Systemüberblick

Bevor auf die konventionellen Approximationen für zeit- und wertkontinuierliche Filter eingegangen werden kann, noch eine kurze Rekapitulation der Eigenschaften linearer zeitinvarianter Systeme [Pap62, 5.], [Kre79, 1].

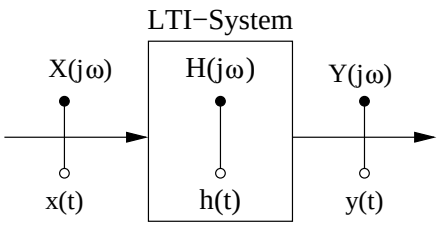


Abbildung 1.1.: Systemgrößen in Original- und Bildbereich

1.2. Linearität

Ein System ist linear, wenn das Superpositionsprinzip (oder der Überlagerungssatz) gilt, d. h. die Gesamtwirkung kann als Summe der Teilwirkungen wiefolgt ausgedrückt werden:

$$x := x_1 + x_2 + \cdots \quad \Rightarrow \quad y := y_1 + y_2 + \cdots \qquad \text{mit} \quad y_i = f_{\text{System}}(x_i)\,.$$

Für ein LTI-System berechnet sich die Ausgangsfunktion als Faltung der Impulsantwort $h(t)$ mit dem Eingangssignal

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.1}$$

weshalb die Summe durch

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \cdots = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \cdots$$

beschrieben werden kann[1].

[1] Gleiches gilt im Frequenzbereich, da die Fourier-Transformation selbst ein linearer Operator ist.

1.3. Stabilität

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die (asymptotische) Stabilität eines linearen, zeitinvarianten Systems besteht darin, daß unter der Voraussetzung eines endlichen Eingangssignals $|x(t)| < M < \infty$ das Ausgangssignal sowohl im Zeitbereich ($|y(t)| < \infty$) als auch Bildbereich ($\left|Y(\mathrm{j}\omega)\right| < \infty$) beschränkt ist [Kre79, 1.2.1], [Wun62, 2.11]. Im Zeitbereich kann daraus relativ schnell eine Bedingung an die Impulsantwort des Systems abgeleitet werden, wenn man für das Integral in Formel 1.1 absolute Konvergenz fordert[2] [Mil81, 1.4.5].

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,|h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq M\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

Im Zeitbereich fordert man deshalb für die Impulsantwort eines stabilen LTI-Systems:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{1.2}$$

was gleichzeitig die Existenz des Fourier-Integrals $H(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ sichert [Wax62], [Mil81, 2.3.1], [WW27, § 4·43], [Pap62, 2-1].

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right|\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

Eine davon abgeleitete Forderung bei rationaler $\mathcal{L}$-Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{a_m s^m + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \tag{1.3}$$

ist die, daß alle Polstellen negative Realteile aufweisen müssen (Hurwitz-Polynom) und der Grad des Zählerpolynoms höchstens so groß wie der des Nenners sein darf. Nur so kann (in einer ersten Betrachtung für $n > m$) gewährleistet werden, daß die Partialbruchzerlegung

$$H(s) = \frac{c_1}{(s-\underset{\times}{s}_1)^{\mu_1}} + \frac{c_2}{(s-\underset{\times}{s}_2)^{\mu_2}} + \cdots \tag{1.4}$$

[2] Und den Mittelwertsatz der Integralrechnung berücksichtigt: $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, mit $\xi \in [a,b]$.

bei der Rücktransformation in den Zeitbereich zu einer beschränkten Impulsantwort führt [Sto92, 2.5.4], [Che95, 44.2], [Kör88, 76]

$$h(t) = \frac{c_1}{(\mu_1 - 1)!} t^{\mu_1 - 1} \mathrm{e}^{\underset{\times}{s}_1 t} + \frac{c_2}{(\mu_2 - 1)!} t^{\mu_2 - 1} \mathrm{e}^{\underset{\times}{s}_2 t} + \cdots \tag{1.5}$$

und wegen

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} s H(s) = 0$$

im Unendlichen sogar verschwindet.

Sollte jedoch $n = m$ gelten, dann kann $H(s)$ in die Summe aus einer echt gebrochen rationalen Funktion (auf welche wieder die Formeln 1.4 und 1.5 zutreffen) und einer Konstante a_n/b_n zerlegt werden[3].

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(a_i - \frac{a_n}{b_n} b_i \right) s^i}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k s^k} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \\ &= \frac{c_1}{(s - \underset{\times}{s}_1)^{\mu_1}} + \frac{c_2}{(s - \underset{\times}{s}_2)^{\mu_2}} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Durch eine Grenzwertbetrachtung für $s \to \infty$ sieht man sofort, daß $H(\infty)$ reell und endlich ist[4].

$$\lim_{s \to \infty} H(s) = \frac{a_n}{b_n} = H(\infty) \tag{1.7}$$

Nimmt man noch die $\mathcal{L}$-Transformationsregel $\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1$ hinzu, so ergibt sich aus

[3] Die Abspaltung einer Konstanten, welche bei der Rücktransformation in den Zeitbereich zu einem Dirac-Stoß führt, kann für den Fall $0 < H(\infty) < \infty$ grundsätzlich immer vorgenommen werden, selbst wenn es sich bei $H(s)$ nicht um eine rationale Funktion handelt.

[4] Wobei es hierbei irrelevant ist, ob der Real- oder Imaginärteil (oder auch der Betrag) von s gegen Unendlich strebt.

$$H(s) = \frac{c_1}{(s-\underset{\times}{s}_1)^{\mu_1}} + \frac{c_2}{(s-\underset{\times}{s}_2)^{\mu_2}} + \cdots + H(\infty) \tag{1.8}$$

die verallgemeinerte Impulsantwort[5]:

$$h(t) = \frac{c_1}{(\mu_1-1)!} t^{\mu_1-1}\,\mathrm{e}^{\underset{\times}{s}_1 t} + \frac{c_2}{(\mu_2-1)!} t^{\mu_2-1}\,\mathrm{e}^{\underset{\times}{s}_2 t} + \cdots + H(\infty)\,\delta(t)\,. \tag{1.9}$$

1.4. Kausalität

Für Systeme der realen Welt kann man grundsätzlich davon ausgehen, daß es eine Wirkung vor der Ursache ausgeschlossen ist. Man fordert deshalb von einem so charakterisierten LTI-System, daß für $t < 0$ das Ausgangssignal $y(t)$ verschwindet. Aus systemtheoretischer Sicht kann eine derartige Einschränkung an die Zeitfunktion nicht ohne Einfluß auf die Bildfunktion der Fourier- bzw. Laplace-Transformation bleiben. Welche Forderungen an die Transformierte eines kausalen Signals $y(t)$ unter dieser Bedingung zu stellen sind, soll im Folgenden ermittelt werden.

1.4.1. $\mathcal{F}$-Bildfunktion

Der geradlinigste Ansatz formuliert das Verschwinden des Signals $y(t)$ für $t < 0$ durch die Äquivalenz

$$\mathrm{s}(-t)\,y(t) \equiv 0\,.$$

Fourier-Transformation dieser (notwendigen, für realisierbare Systeme nicht hinreichenden) Bedingung in den Bildbereich führt mit Hilfe des Faltungssatzes $f_1(t)\,f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(\mathrm{j}\omega) * F_2(\mathrm{j}\omega)/2\pi$ sowie der Korrespondenz $\mathrm{s}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \pi\,\delta(\omega) + 1/\mathrm{j}\omega$ zu[6]:

[5] Auch in diesem Fall gilt $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$, jedoch nicht mehr bei $\mathrm{Re}\,\underset{\times}{s} \geq 0$.

[6] Außerdem nicht zu vergessen der Ähnlichkeitssatz sowie die Eigenschaft der Dirac-Funktion $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$.

$$\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{2\pi} * \left[\pi\delta(-\omega) + \mathrm{j}\frac{1}{\omega}\right] = \frac{1}{2}\left[Y(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\frac{1}{\pi\omega} * Y(\mathrm{j}\omega)\right] = 0\,.$$

Separiert man Real- und Imaginärteil, dann muß für ein kausales Signal

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)] - \frac{1}{\pi\omega} * \mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)] &= 0\\ \mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)] + \frac{1}{\pi\omega} * \mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)] &= 0\end{aligned}$$

gelten. Umstellen nach $\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)$ und $\mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega)$ ergibt folgende Zusammenhänge:

$$\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\pi\omega} * \mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,Y(\Omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \mathcal{H}\{\mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega)\} \tag{1.10}$$

$$-\mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\pi\omega} * \mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,Y(\Omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \mathcal{H}\{\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)\}\,. \tag{1.11}$$

Real- und Imaginärteil (der Fourier-Transformierten) eines kausalen Signals sind also wechselseitig über die Hilbert-Transformation[7]

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi x} * f(x)$$

verbunden [PP02, 9], [Mar95, 5.1], [Fri85, 4].

Ein anderer, aber sehr einfacher Ansatz geht davon aus, daß grundsätzlich jede Zeitfunktion in eine gerade und eine ungerade Teilfunktion $y(t) = y_g(t) + y_u(t)$ zerlegt werden kann [Pap62, 10-2], [Fri85, 4.1]. Dann gilt wegen $y(-t) = y_g(t) - y_u(t)$ bei Addition und Subtraktion beider Formeln:

$$y(t) + y(-t) = 2y_g(t) \qquad\qquad y(t) - y(-t) = 2y_u(t),$$

[7] Alle vorgenannten Fakten müssen sicherlich auch dann gelten, wenn das System durch einen Dirac-Stoß angeregt wird. Aus diesem Grund können sämtliche Beziehungen genauso auf die $\mathcal{F}$-Übertragungsfunktion eines LTI-Systems angewandt werden, wenn man $Y(\mathrm{j}\omega) = H(\mathrm{j}\omega)$ und $y(t) = h(t)$ setzt.

d. h. beide Teilfunktionen sind von $y(t)$ und deshalb auch wechselseitig abhängig[8]. Im speziellen Fall eines kausalen Signals, d. h. $y(t) = 0$ für $t < 0$ bzw. $y(-t) = 0$ für $t > 0$ kann folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2y_g(t) = 2y_u(t), \qquad && t \geq 0 \\ y(-t) &= 2y_g(t) = -2y_u(t), \qquad && t < 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich die Abhängigkeit zwischen geradem und ungeradem Anteil von $y(t)$ direkt ablesen.

$$y_g(t) = \operatorname{sign}(t) y_u(t) \qquad\qquad y_u(t) = \operatorname{sign}(t) y_g(t)$$

Berücksichtigt man jetzt noch die Eigenschaft der Fourier-Transformation reeller Zeitfunktion, nämlich daß der gerade Anteil von $y(t)$ mit dem Realteil der Bildfunktion $Y(\mathrm{j}\omega)$, der ungerade Teil hingegen mit dem Imaginärteil korrespondiert (vgl. E.1.1), so führt Anwendung des Faltungssatzes $f_1(t)\, f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(\mathrm{j}\omega) * F_2(\mathrm{j}\omega)/2\pi$ sowie der Korrespondenz $\operatorname{sign}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 2/\mathrm{j}\omega$ zum bekannten Ergebnis:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y(\mathrm{j}\omega) &= \frac{2}{\mathrm{j}\omega} * \mathrm{j}\frac{\operatorname{Im} Y(\mathrm{j}\omega)}{2\pi} && \mathrm{j}\operatorname{Im} Y(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{\mathrm{j}\omega} * \frac{\operatorname{Re} Y(\mathrm{j}\omega)}{2\pi} \\ \operatorname{Re} Y(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{\pi\omega} * \operatorname{Im} Y(\mathrm{j}\omega) && \operatorname{Im} Y(\mathrm{j}\omega) = -\frac{1}{\pi\omega} * \operatorname{Re} Y(\mathrm{j}\omega) \\ \operatorname{Re} Y(\mathrm{j}\omega) &= \mathcal{H}\{\operatorname{Im} Y(\mathrm{j}\omega)\} && \operatorname{Im} Y(\mathrm{j}\omega) = -\mathcal{H}\{\operatorname{Re} Y(\mathrm{j}\omega)\}\,. \end{aligned}$$

1.4.2. $\mathcal{L}$-Bildfunktion

Nehmen wir als Ausgangssituation der Betrachtungen in der Laplace-Ebene an, daß die Transformierte $Y(s) = \operatorname{Re} Y(s) + \mathrm{j}\operatorname{Im} Y(s)$ des reellen Signals $y(t)$ in der rechten Halbebene vollständig analytisch sei, d. h. dort weder Singularitäten (also auch keine Pole) noch Sprünge hat.

[8] Man beachte aber, daß mögliche Dirac-Stöße zum Zeitpunkt $t = 0$ in diesen Formeln verlorengehen, denn $\delta(t)$ spiegelt sich ausschließlich im geraden Teil $y_g(t)$, jedoch nicht im ungeraden Teil $y_u(t)$ wieder (vgl. auch Kommentar in [Pap62, 10-2] zur Hilbert-Transformation). In Folge dessen gelten die weiteren Ausführungen (bis dieser Fall auf Seite 14 erörtert und in Zusammenhang mit Abschnitt 1.3 gebracht wird) nur für Signale mit $Y(\infty) = 0$ bzw. Systeme mit $H(\infty) = 0$.

Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß sich eine solche Funktion (unter der Bedingung $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$, vgl. Abschnitt D.7.1.3 oder [Pap62, 10-5]) für $\operatorname{Re} s > 0$ vollständig durch ihre Randwerte auf der imaginären Achse[9] definiert [BC03, 119].

$$Y(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\mathrm{j}\Omega)}{s-\mathrm{j}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega, \qquad \operatorname{Re} s > 0 \tag{1.12}$$

Aus demselben mathematischen Gebiet entstammen auch die folgenden Ausdrucksmöglichkeiten, welche für $\operatorname{Re} s > 0$ die Rückgewinnung der Funktion nur aus dem Real- oder Imaginärteil ermöglichen.

$$Y(s) = \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Re} Y(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Im} Y(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.13}$$

Zur Rücktransformation der letzten Darstellung in den Zeitbereich wenden wir jetzt den Faltungssatz der Laplace-Transformation $(F_1 * F_2)(s) = \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} F_1(\Omega)F_2(s-\Omega)\,\mathrm{d}\Omega \bullet\!\!-\!\!\circ\, 2\pi\mathrm{j}\, f_1(t)\, f_2(t)$ an [AS72, 29], wobei $F_2(s) = s^{-1}$ und $F_1(s) = \operatorname{Re} Y(s)$ bzw. $F_1(s) = \mathrm{j}\operatorname{Im} Y(s)$ gesetzt wird.

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = 2\,\mathrm{s}(t)\,\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} \tag{1.14}$$

Diese Beziehung enthält das wesentliche Resultat: wegen der Multiplikation mit dem Einheitssprung $\mathrm{s}(t)$ verschwindet das Signal $y(t)$ für $t < 0$ (Kausalität), wenn $Y(s)$ in der gesamten rechten Halbebene analytisch ist[10].

Die Aussage führt zu einer wesentlichen Forderung an die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems (wenn $y(t) = h(t)$ und demzufolge $Y(s) = H(s)$ gesetzt wird), nämlich daß eine rationale $\mathcal{L}$-Übertragungsfunktion $H(s)$ keine Pole in der rechten Halbebene besitzen darf.

1.4.3. Schlußfolgerungen

Anhand der vorangegangenen Ausführungen wurde deutlich, daß ein kausales Signal (bzw. die Impulsantwort eines LTI-Systems) unbedingt mit einer Abhängigkeit zwischen Real- und Imagi-

[9] Entspricht mit $s \to \mathrm{j}\omega$ dem Übergang von der Fourier- zur Laplace-Transformierten (vgl. auch [Mil81, 4.1.3]).

[10] Wegen des Integrationsintervalls in $\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$ sind in diesem Fall Laplace- und Fourier-Transformierte (bis auf das Konvergenzverhalten der Transformation) gleichwertig.

närteil der Bildfunktion (über die HILBERT-Transformation) verbunden ist. Aus der Funktionentheorie entstammte die weiterreichende Erkenntnis, daß ein solcher Zusammenhang immer dann gegeben ist, wenn sich das Signal in der rechten $\mathcal{L}$-Halbebene als frei von Singularitäten darstellt. Für die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems hat deshalb die Lage der Pole entscheidende Bedeutung nicht nur in Bezug auf die Stabilität sondern auch auf die Kausalität der Impulsantwort und damit die Realisierbarkeit.

Was die kausalen Signale angeht, so kann man aufgrund der Abhängigkeit zwischen Real- und Imaginärteil noch redundanzfreie Darstellungen ableiten [Bra03, 13]:

$$\begin{aligned} Y(\mathrm{j}\omega) &= \mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)] - \frac{\mathrm{j}}{\pi\omega} * \mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)] = \frac{1}{\pi\omega} * \mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)] + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)] \\ &= \left[\delta(\omega) - \frac{\mathrm{j}}{\pi\omega}\right] * \mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega) \qquad = \left[\mathrm{j}\,\delta(\omega) + \frac{1}{\pi\omega}\right] * \mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega)\ . \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Faltungssatzes und (wieder) der Transformation für den Einheitssprung sowie $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \Omega)\,\mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\Omega)]\,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)$ auf

$$\begin{aligned} Y(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{\pi}\left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right] * \mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega) \qquad = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\left[\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right] * \mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega) \\ &= \mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)] - \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\Omega)}{\omega - \Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\Omega)}{\omega - \Omega}\,\mathrm{d}\Omega + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)] \end{aligned}$$

erhält man für die Zeitfunktion

$$y(t) = 2\,\mathrm{s}(t)\,\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)\} = 2\mathrm{j}\,\mathrm{s}(t)\,\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)\}\ .$$

Sollte $\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)\}$ für $t = 0$ verschwinden, dann ist es also ausreichend nur eine Komponente, entweder Real- oder Imaginärteil, zur Beschreibung des Signals $y(t)$ heranzuziehen[11].

$$y(t) = 2\,\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{Re}\,Y(\mathrm{j}\omega)\} = 2\mathrm{j}\,\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{Im}\,Y(\mathrm{j}\omega)\}\ . \tag{1.15}$$

Die jeweils andere Komponente ist faktisch redundant, was solche Transformationen wie die

[11] Ansonsten muß man den in $\mathrm{s}(t)$ steckenden DIRAC-Stoß noch berücksichtigen.

Cosinus- oder Sinus-Transformation rechtfertigt [Wun62, 3.2], [Sto92, 5.1.2]. Diese ergeben sich (bis auf einen konstanten Faktor) sofort aus Formel 1.15, wenn man die Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen berücksichtigt.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}[Y(\mathrm{j}\omega)]\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathrm{Im}[Y(\mathrm{j}\omega)]\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

In gleicher Art und Weise können auch die Ausführungen für die Laplace-Transformierte $F_1(s)$ von Seite 8 fortgesetzt werden. Denn gehorcht $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$ der Bedingung nach Gleichung 1.14 "von Hause aus", d. h. verschwindet für $t < 0$, so wird wegen des Wegfalls des jetzt unnötigen Faktors $\mathrm{s}(t)$ das kausale Signal $y(t)$ vollständig durch den Real- oder Imaginärteil seiner Laplace-Transformierten beschrieben.

$$y(t) = 2\,\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{Re}\,Y(s)\} = 2\mathrm{j}\,\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{Im}\,Y(s)\} \tag{1.16}$$

1.4.4. Integralsätze

Berücksichtigt man die Eigenschaften der Fourier- bzw. Laplace-Transformierten reeller Zeitfunktionen, so lassen sich für die Übertragungsfunktion von kausalen LTI-Systemen zahlreiche Darstellungsformen angeben, die oftmals als Integralsätze von Bode bezeichnet werden [Bod45], [Mar95, 5.1], [Pap62, 10.], [SBG97, 2.3.2].

1.4.4.1. Real-/Imaginärteilbeziehungen in der $\mathcal{L}$-Ebene

Eine erste Betrachtung dazu (die etwas ausführlicher erfolgt), geht von Formel 1.12 aus und erweitert zunächst den Integranden mit $s + \mathrm{j}\Omega$.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s+\mathrm{j}\Omega)H(\mathrm{j}\Omega)}{s^2+\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sH(\mathrm{j}\Omega)}{s^2+\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega H(\mathrm{j}\Omega)}{s^2+\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega\,. \end{aligned}$$

Bedenkt man nun, daß:

- die Integration von $-\infty$ bis ∞ über eine ungerade Funktion Null ergibt;
- Integration einer geraden Funktion durch Verdoppelung in den neuen Grenzen $[0,\infty]$ ausgedrückt werden kann;
- der Imaginärteil der $\mathcal{F}$-Transformierten einer reellen Zeitfunktion eine ungerade Funktion ist;
- der Realteil der $\mathcal{F}$-Transformierten einer reellen Zeitfunktion eine gerade Funktion ist;
- Division/Multiplikation einer geraden und einer ungeraden Funktion wieder eine ungerade Funktion ergibt;
- der Nenner $\Omega^2 + s^2$ als auch $\Omega \operatorname{Im} H(\mathrm{j}\Omega)$ bezüglich der Integrationsvariable Ω gerade Funktionen sind;
- $\Omega \operatorname{Re} F(\mathrm{j}\Omega)$ hingegen eine ungerade Funktion darstellt;

so ergibt sich im $\mathcal{L}$-Bildbereich:

$$H(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{Re}[H(\mathrm{j}\Omega)] - \Omega \operatorname{Im}[H(\mathrm{j}\Omega)]}{s^2 + \Omega^2} \, \mathrm{d}\Omega, \qquad \operatorname{Re} s > 0 \, .$$

Eine weitere Darstellung, der allerdings keinerlei Annahmen in Bezug auf die Zeitfunktionen zugrunde liegen, kann ausgehend von 1.13 gewonnen werden [Wun62, 3.13]. Dazu addiert und subtrahiert man einfach $\operatorname{Re} H(s)$ im Zähler des Integrals

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Re}[H(\Omega)] - \operatorname{Re}[H(s)] + \operatorname{Re}[H(s)]}{s - \Omega} \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{\operatorname{Re}[H(s)]}{\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{s - \Omega} + \frac{1}{\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Re}[H(\Omega)] - \operatorname{Re}[H(s)]}{s - \Omega} \, \mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

und nimmt die für $\operatorname{Re} s > 0$ geltende Beziehung $\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} (s - \Omega)^{-1} \, \mathrm{d}\Omega = \mathrm{j}\pi$ zu Hilfe.

$$H(s) = \operatorname{Re}[H(s)] + \frac{1}{\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Re}[H(\Omega)] - \operatorname{Re}[H(s)]}{s - \Omega} \, \mathrm{d}\Omega$$

Bringt man noch $\operatorname{Re} H(s)$ auf die linke Seite, so kann direkt eine neue Variante der Abhängig-

keitsdarstellung zwischen Real- und Imaginärteil gewonnen werden[12].

$$\operatorname{Im} H(s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Re}[H(\Omega)] - \operatorname{Re}[H(s)]}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega, \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\operatorname{Re} H(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\operatorname{Im}[H(\Omega)] - \operatorname{Im}[H(s)]}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega$$

1.4.4.2. Real-/Imaginärteilbeziehungen auf der jω-Achse

Auf der imaginären Achse gilt (für Systeme mit $\lim_{\omega\to\infty} H(\mathrm{j}\omega) = 0$, vgl. Abschnitt D.7.1.3) die aus der Funktionentheorie bekannte Beziehung:

$$H(\mathrm{j}\omega) = H(\mathrm{j}\omega) * \frac{1}{\mathrm{j}\omega\pi} = \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\mathrm{j}\Omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{1.17}$$

Mit dem Ziel den Nenner des Integranden zu einer geraden (oder ungeraden) Funktion zu machen, soll uns $\omega+\Omega$ als Erweiterung dienen.

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega+\Omega)H(\mathrm{j}\Omega)}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega$$

Dabei verschwinden die Integrale über $\omega \operatorname{Im} H(\mathrm{j}\Omega)$ und $\Omega \operatorname{Re} H(\mathrm{j}\Omega)$, da es sich bezüglich Ω um ungerade Funktionen handelt.

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{\pi\mathrm{j}}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{0}^{\infty} \frac{\omega \operatorname{Re}[H(\mathrm{j}\Omega)] + \mathrm{j}\Omega \operatorname{Im}[H(\mathrm{j}\Omega)]}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.18}$$

Für den Real- und Imaginärteil kann man nun direkt ablesen[13] (vgl. auch [Pap62, 10-2], [Mar95, 5.1], [Wun62, 3.13]):

[12] Genauso für die reelle Komponente, hier jedoch ohne Beweis.
[13] Beide Gleichungen bestätigen augenscheinlich $H(-\mathrm{j}\omega) = H^*(\mathrm{j}\omega)$.

$$\operatorname{Re} H(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_0^\infty \frac{\Omega \operatorname{Im} H(\mathrm{j}\Omega)}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.19}$$

$$\operatorname{Im} H(\mathrm{j}\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} H(\mathrm{j}\Omega)}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{1.20}$$

1.4.4.3. Bode's Real-/Imaginärteilbeziehungen

Oftmals sind in der Literatur Darstellungen zu finden, in denen $H(\mathrm{j}\omega)$ auch auf der rechten Seite im Integranden auftaucht und die letztlich auf [Bod45] zurückgehen[14] [Pap62, 10-2], [Wun62, 3.14], [Spă73, 6.4].

$$\operatorname{Re} H(\mathrm{j}\omega) = H(\infty) + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_0^\infty \frac{\Omega \operatorname{Im}[H(\mathrm{j}\Omega)] - \omega \operatorname{Im}[H(\mathrm{j}\omega)]}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.21}$$

$$\operatorname{Im} H(\mathrm{j}\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}[H(\mathrm{j}\Omega)] - \operatorname{Re}[H(\mathrm{j}\omega)]}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.22}$$

Offensichtlich kann aber der Term mit $H(\mathrm{j}\omega)$ aus dem Integral herausgezogen werden, da er nicht von der Integrationsvariable Ω abhängt. Unsere Aufmerksamkeit soll deshalb dem Integral $\int_0^\infty 2\omega/(\omega^2-\Omega^2)\,\mathrm{d}\Omega$ gelten, dessen Cauchy'scher Hauptwert[15] sowohl anschaulich als auch im Hinblick auf dessen Stammfunktion $\ln\left|\frac{\omega+\Omega}{\omega-\Omega}\right|$ verschwindet[16] [AS72, 3.3.23].

$$\mathrm{V.\,P.}\int_0^\infty \frac{2\omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{V.\,P.}\int_0^\infty \frac{1}{\Omega+\omega} - \frac{1}{\Omega-\omega}\,\mathrm{d}\Omega = \ln\left|\frac{\omega+\Omega}{\omega-\Omega}\right|_{\Omega=0}^{\Omega\to\infty} = 0$$

Beide Beziehungen entsprechen folglich den Formeln 1.19 und 1.20, nutzen also nur die Äquivalenz:

[14] Der Summand $H(\infty)$ sei zunächst ignoriert, da er nur bei Systemen mit $\lim_{|s|\to\infty} H(s) \neq 0$ berücksichtigt werden muß (auf die noch eingegangen wird).

[15] Für $\Omega = \omega$ existiert die Funktion offensichtlich nicht.

[16] Ein Spezialfall des Grenzwertes $\lim_{\omega\to\infty} \omega \ln\left|\frac{\omega+s}{\omega-s}\right| = 2\operatorname{Re} s$ in der $\mathcal{L}$-Ebene [SBG97, B.1].

$$\text{V. P.} \int_0^\infty \frac{2\omega H(\mathrm{j}\omega)}{\omega^2 - \Omega^2}\,\mathrm{d}\Omega = 2\omega H(\mathrm{j}\omega)\,\text{V. P.} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = 0\,.$$

1.4.4.4. Systeme mit $H(\infty) \neq 0$

Für LTI-Systeme mit der Eigenschaft

$$\lim_{\substack{|s|\to\infty \\ \operatorname{Re} s>0}} H(s) \neq 0,$$

aber mit beschränkter $\mathcal{F}$-Übertragungsfunktion $|H(\infty)| = \lim_{|s|\to\infty} |H(s)|$, wie für rationale Übertragungsfunktionen in Abschnitt 1.3 betrachtet, kann man nicht auf Jordan's Lemma zurückgreifen. Aus diesem Grund sind alle vorangegangenen Aussagen derart anzupassen, daß der im Unendlichen verlaufende Integrationsweg (nach Abbildung D.4) bei der Anwendung von Cauchy's Integralformel berücksichtigt wird [Wun62, 3.12], [Pap62, 10-2]. Den allgemeinen Fall einer, in der rechten Halbebene analytischen Funktion, muß man deshalb folgendermaßen korrigieren:

$$H(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{H(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{C_\infty} \frac{H(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{1.23}$$

Betrachten wir zuerst den Integrationsweg C_∞ und bringen die Substitution $\Omega - s = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ mit $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{j}\,r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ zur Anwendung.

$$\int_{C_\infty} \frac{H(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = -\int_{C_\infty} \frac{H(\Omega)}{\Omega-s}\,\mathrm{d}\Omega = -\mathrm{j} \lim_{r\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - s)\,\mathrm{d}\theta$$

Unter der Maßgabe $r \to \infty$ kann man sicherlich $|\Omega| \gg |s|$ annehmen, d. h. $\Omega - s \approx \Omega$ setzen.

$$\int_{C_\infty} \frac{H(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = -\mathrm{j} \lim_{r\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

Außerdem ist wegen der (für reelle Zeitfunktionen immer geltenden) Relation

$$H(s^*) = H^*(s),$$

eine Beschränkung des Integrationsweges auf einen positiven Viertelkreis möglich.

$$\begin{aligned}\int_{C_\infty} \frac{H(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega &= -\mathrm{j}\lim_{r\to\infty}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta\right]\\ &= -\mathrm{j}\lim_{r\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} H(r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}) + H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\mathrm{j}\lim_{r\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} H^*(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) + H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta\\ &= -2\mathrm{j}\lim_{r\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Letzter Ausdruck weist nun eindeutig darauf hin, daß es sich bei dem Integral entlang C_∞ um eine rein imaginäre Konstante handelt, welche für $r \to \infty$ sowohl allgemein als auch speziell auf der reellen Achse ($\theta = 0$, $\operatorname{Re} s \to \infty$) nicht notwendigerweise verschwinden muß.

Zurück zur Ausgangsbeziehung 1.23 erhalten wir durch Einsetzen

$$H(s) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{H(\Omega)}{s-\Omega}\,\mathrm{d}\Omega + \frac{1}{\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

und stellen fest, daß sich der Realteil[17] von $H(s)$ um den konstanten Betrag

$$H(\infty) = \frac{1}{\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Re} H(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

erhöht[18]. Aus diesem Grund ändert sich z. B. Formel 1.12 wiefolgt:

$$H(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\mathrm{j}\Omega)}{s-\mathrm{j}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega + H(\infty),$$

d. h. der Realteil kann bei solchen Systemen nur bis auf eine Konstante aus dem Imaginärteil bestimmt werden [Pap62, 10-2]. Umgekehrt bleibt die Abhängigkeit nach Beziehung 1.11 jedoch

[17] Deshalb haben alle Beziehungen für den Imaginärteil der $\mathcal{L}$-Übertragungsfunktion von Systemen mit $\lim_{|s|\to\infty} H(s) = 0$ Bestand.

[18] Konform zu Formel 1.7, welche speziell für rationale Übertragungsfunktionen gilt (mit denen wir es in der Praxis eigentlich immer zu tun haben). Logisch auch deshalb weil die Rücktransformation des konstanten Anteils der Übertragungsfunktion nach Formel 1.6 im Zeitbereich zu einem Dirac-Impuls führt, welcher grundsätzlich nicht als ungerade Funktion existiert.

bestehen, so daß sich die neue Gesamtsituation folgendermaßen darstellt[19]:

$$\operatorname{Re} H(\mathrm{j}\omega) - H(\infty) = \mathcal{H}\{\operatorname{Im} H(\mathrm{j}\omega)\} \qquad \operatorname{Im} H(\mathrm{j}\omega) = -\mathcal{H}\{\operatorname{Re} H(\mathrm{j}\omega)\} \ . \tag{1.24}$$

1.5. Minimalphasensysteme (MPS)

1.5.1. Eigenschaften

Minimalphasig nennt man Systeme, die in der rechten $\mathcal{L}$-Halbebene weder Pole noch Nullstellen besitzen [Pap62, 10-3]. Für rationale Übertragungsfunktionen bedeutet diese Eigenschaft, daß Nenner und Zähler von $H(s)$ Hurwitz-Polynome sein müssen. Die Freiheit von Polen bzw. Nullstellen für $\operatorname{Re} s > 0$ machen $H(s)$ und $H^{-1}(s)$ auf diesem Gebiet zu analytischen Funktionen[20]. Unter solchen Voraussetzungen ist man in der Lage, $H(s)$ zu logarithmieren und dabei die Holomorphieeigenschaft trotzdem zu bewahren. Bezeichnen wir $F(s) = \ln H(s)$, so kann man nach Beziehung 1.10 und 1.11 einen determinierten Zusammenhang zwischen Dämpfung[21] $A(s) = -\operatorname{Re} F(s) = -\ln|H(s)|$ und Phase $B(s) = -\operatorname{Im} F(s) = -\mathrm{j} \measuredangle H(s)$ angeben.

$$A(\omega) = \mathcal{H}\{B(\omega)\} \qquad B(\omega) = -\mathcal{H}\{A(\omega)\}$$

Eine wichtige Voraussetzung für die Anwendbarkeit beider Formeln ist nach dem Lemma von Jordan allerdings $\lim_{|s|\to\infty} |F(s)| = 0$. Im Allgemeinen kann man von dieser Voraussetzung jedoch nicht ausgehen, so daß genau wie in den Beziehungen 1.24 die Dämpfung $A(\infty)$ zu berücksichtigen ist [Fri81, 5.3.1.2].

[19] In [Pap62, 10-5] werden LTI-Systeme mit $0 < H(\infty) < \infty$ als nicht-kausal angesehen, denn die Impulsantwort enthält (wie in Abschnitt 1.3 schon dargelegt) unweigerlich Dirac-Anteile.

[20] Die Übertragungsfunktion $H(s)$ gehört wegen der dort vorausgesetzten Polfreiheit zu einem stabilen System (vgl. Abschnitt 1.3).

[21] Bei Anwendung der Definition in Neper: $A(\omega) = -\ln|H(\mathrm{j}\omega)|$.

$$A(\omega) - A(\infty) = \mathcal{H}\{B(\omega)\} \qquad\qquad B(\omega) = -\mathcal{H}\{A(\omega)\}$$

1.5.2. Zerlegungssatz von Bode

Praktisch kann man jedes LTI-System mit rationaler Übertragungsfunktion $H(s) = U(s)/V(s)$ als Kettenschaltung eines Allpaß- und eines Minimalphasensystems verstehen [Pap62, 10-3], [Mar95, 5.2], [Wun62, 3.14], [Fri79a, 3.5]. Spalten wir dazu die Zählerfunktion $U(s)$ so auf, daß alle Nullstellen mit negativem Realteil in $U_-(s)$ liegen, die mit positivem in $U_+(s)$.

$$H(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{U_-(s)\,U_+(s)}{V(s)}$$

Einfache Erweiterung mit dem Hurwitz-Polynom $U_+(-s)$ ergibt[22]

$$H(s) = \underbrace{\frac{U_-(s)\,U_+(-s)}{V(s)}}_{H_{\mathrm{MPS}}} \cdot \underbrace{\frac{U_+(s)}{U_+(-s)}}_{H_{\mathrm{ALP}}}, \tag{1.25}$$

d. h. die Zerlegung in

- ein minimalphasiges System H_{MPS}, welches keine Nullstellen in der rechten $\mathcal{L}$-Halbebene besitzt;
- sowie einen stabilen Allpaß H_{ALP}, also ein System mit $|H_{\mathrm{ALP}}(s)| = 1$.

$$H(s) = H_{\mathrm{MPS}}(s) \cdot H_{\mathrm{ALP}}(s) \tag{1.26}$$

1.5.3. Schlußfolgerungen

1. Der eigentliche Begriff “Minimalphasensystem” sollte an dieser Stelle klar werden, wenn man die Gesamtphase

[22] Die Nullstellen von $U_+(-s)$ besitzen allesamt negative Realteile.

$$-B(\omega) = \measuredangle H(\mathrm{j}\omega) = \measuredangle H_{\mathrm{MPS}}(\mathrm{j}\omega) + \measuredangle H_{\mathrm{ALP}}(\mathrm{j}\omega)$$

betrachtet. Denn würde der Anteil des Allpaß' vermieden, so reduzierte sich das Gesamtsystem auf ein Minimalphasensystem.

2. Der determinierte Zusammenhang zwischen Dämpfung und Phase eines Minimalphasensystems besteht aufgrund der Nullstellenlage (bzw. Analytizität von $\ln H_{\mathrm{MPS}}(s)$ und $\ln H_{\mathrm{MPS}}^{-1}(s)$ in der rechten $\mathcal{L}$-Halbebene). Die Abhängigkeit von Real- und Imaginärteil der einzelnen Übertragungsfunktion (vgl. Abschnitt 1.4) ist davon thematisch unberührt, zumal sich die dadurch bedingte Kausalität und Stabilität auf die Lage der Polstellen bezieht.

3. Aus Formel 1.25 kann man als allgemeine Übertragungsfunktion eines Allpaß' ablesen:

$$H_{\mathrm{ALP}}(s) = \frac{G(-s)}{G(s)} \qquad \text{mit} \qquad B_{\mathrm{ALP}}(\omega) = 2\measuredangle G(\mathrm{j}\omega)\,.$$

Um die Problematik etwas anschaulicher zu gestalten, hier ein Beispiel aus [Pap62, 10-3].

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{2+s}}_{H_{\mathrm{MPS}}} \cdot \underbrace{\frac{1-s}{1+s}}_{H_{\mathrm{ALP}}}$$

Wie sofort erkennbar, handelt es sich um ein stabiles System mit den Polen $\underset{\times}{s}_1 = -1$ und $\underset{\times}{s}_2 = -2$. Die Nullstelle des Allpaß' bei $\underset{\circ}{s} = +1$ hat einen positiven Realteil, ist also $H_{\mathrm{ALP}}(s)$ richtig zugeordnet. Obwohl insgesamt $H(\infty) = 0$ gilt (Jordan-Bedingung), verschwindet die Amplitude des Allpaß-Anteils $H_{\mathrm{ALP}}(\infty)$ im Unendlichen nicht[23]. Auch die Partialbruchzerlegung für $H(s)$ deutet einerseits auf Stabilität (speziell auch $h(\infty) = 0$), andererseits auch auf Kausalität ($h(t) = 0$ für $t < 0$) hin.

$$H(s) = \frac{3}{2+s} - \frac{2}{1+s} \bullet\!\!-\!\!\circ\; h(t) = \mathrm{s}(t)(3\,\mathrm{e}^{-2t} - 2\,\mathrm{e}^{-t})$$

Beide als Kettenschaltungen anzusehende Übertragungsfunktionen

[23] Die Korrespondenz $\frac{1-s}{1+s} \bullet\!\!-\!\!\circ\; 2\,\mathrm{e}^{-t} - \delta(t)$ deutet wegen der Beteiligung eines Dirac-Stoßes schon darauf hin.

$$H_{\mathrm{ALP}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1-\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega} \qquad H_{\mathrm{MPS}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}$$

$$\operatorname{Re} H_{\mathrm{ALP}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \qquad \operatorname{Re} H_{\mathrm{MPS}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{4+\omega^2}$$

$$\operatorname{Im} H_{\mathrm{ALP}}(\mathrm{j}\omega) = -\frac{2\omega}{1+\omega^2} \qquad \operatorname{Im} H_{\mathrm{MPS}}(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\omega}{4+\omega^2}$$

haben voneinander abhängige Real- und Imaginärteile, wie man mit der Transformationsbeziehung

$$\mathcal{H}\left\{\frac{x}{a^2+x^2}\right\} = -\frac{a}{a^2+x^2}$$

feststellt.

$$\operatorname{Re} H_{\mathrm{ALP}}(\mathrm{j}\omega) - H_{\mathrm{ALP}}(\infty) = \frac{2}{1+\omega^2} = \mathcal{H}\{\operatorname{Im} H_{\mathrm{ALP}}(\mathrm{j}\omega)\}$$

$$\operatorname{Re} H_{\mathrm{MPS}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{4+\omega^2} = \mathcal{H}\{\operatorname{Im} H_{\mathrm{MPS}}(\mathrm{j}\omega)\}$$

Trotzdem besteht ein fester Zusammenhang zwischen Dämpfungs- und Phaseverlauf nur für den Minimalphasenteil $H_{\mathrm{MPS}}(s)$, nicht für $H(s)$ insgesamt. Der Allpaß-Anteil sorgt insbesondere dafür, daß sich die Phase um den Betrag $\arctan \frac{2\omega}{1-\omega^2}$ erhöht.

1.6. Realisierbarkeit

LTI-Systeme, die sowohl kausal als auch stabil sind, nennt man (physikalisch) realisierbar. Kausalität bedeutet $y(t) = 0$ für $t < 0$ oder im Bildbereich, daß $H(s)$ in der rechten $\mathcal{L}$-Halbebene vollständig analytisch ist[24]. Stabilität liegt vor, wenn die Impulsantwort $h(t)$ beschränkt ist (und für $t \to \infty$ verschwindet, vgl. Abschnitt 1.3) oder, bei rationaler Übertragungsfunktion, alle Pole von $H(s)$ negative Realteile aufweisen. Speziell für quadratisch integrierbare Übertragungsfunktionen[25]

[24] Was dazu führt, daß Real- und Imaginärteil von $H(\mathrm{j}\omega)$ über die Hilbert-Transformation verbunden sind (siehe Abschnitt 1.4).

[25] Parseval'sches Theorem [Pap62, 2-5], [Mar95, 4.11].

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{j}\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty \tag{1.27}$$

sind diese Bedingungen mit Hilfe des Paley-Wiener-Kriteriums prüfbar [PW34, Theorem XII], [Pap62, 10-5], [Ach67, § 82], [Wun62, 3.22], [Wax62].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(\mathrm{j}\omega)||}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega < \infty \tag{1.28}$$

Die Bedeutung der Paley-Wiener-Bedingung liegt unter anderem darin, daß es

- sich bei $|H(\mathrm{j}\omega)|$ und $-\ln|H(\mathrm{j}\omega)|$ um die meßbaren Größen Amplitudengang bzw. Dämpfungsverlauf (siehe Fußnote 21) handelt und
- nicht auf Minimalphasensysteme beschränkt ist, denn bezüglich des Amplitudenganges $H(\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|$ unterscheiden sich diese nicht von anderen LTI-Systemen (Zerlegungssatz von Bode, vgl. Formel 1.26 in Abschnitt 1.5).

Man kann sich nun fragen, ob stabile, kausale Minimalphasensysteme mit quadratisch-integrierbarer Übertragungsfunktion bzw. Impulsantwort (nach 1.27) das Paley-Wiener-Kriterium grundsätzlich immer erfüllen[26]?

Da die Übertragungsfunktion $H(s)$ von solchen LTI-Systemen weder Pole noch Nullstellen in der rechten $\mathcal{L}$-Halbebene (und auch nicht auf der $\mathrm{j}\omega$-Achse) aufweist, gilt $0 < H(\omega) < \infty$. Unter dieser Voraussetzung wird die einzige (wesentliche) Singularität des Logarithmus im Koordinatenursprung ausgeschlossen und die komplexe Dämpfung $A(s) = -\ln H(s) \in \mathbb{C}$ in der rechten Halbebene, d. h. für $\operatorname{Re} s \geq 0$ zu einer analytischen Funktion. Aus der Darstellung des komplexen Logarithmus

$$A(s) = -\ln H(s) = -\ln|H(s)| - \mathrm{j}\,\measuredangle H(s) + 2\mathrm{j}\,k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

wird ersichtlich, daß $\ln|H(\mathrm{j}\omega)|$ den Realteil von $A(s)$ entlang der imaginären Achse ausmacht.

[26] Die Frage, ob instabile LTI-Systeme das Paley-Wiener-Kriterium erfüllen stellt sich deshalb nicht, weil deren Impulsantwort $h(t)$ wegen der Pole in der rechten Halbebene nicht quadratisch integrierbar sein kann (vgl. auch Abschnitt 1.3, insbesondere Formel 1.5).

$$-\ln|H(\mathrm{j}\omega)| = \lim_{\alpha\to 0} \operatorname{Re} A(s) = \operatorname{Re} A(\mathrm{j}\omega)$$

Definieren wir nun zwei logarithmische ("Gleichrichter"-) Funktionen folgendermaßen:

$$A_+(\omega) = \begin{cases} \ln|H(\mathrm{j}\omega)| & (|H(\mathrm{j}\omega)| \geq 1) \\ 0 & (|H(\mathrm{j}\omega)| < 1) \end{cases} \qquad A_-(\omega) = \begin{cases} \ln|H(\mathrm{j}\omega)| & (|H(\mathrm{j}\omega)| < 1) \\ 0 & (|H(\mathrm{j}\omega)| \geq 1) \end{cases},$$

dann wird $A_+(\omega)$ immer positiv, $A_-(\omega)$ hingegen stets negativ sein. Mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(\omega)|}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_-(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega \\ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_-(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

kann man folgende Beweismöglichkeiten in Betracht ziehen:

1. Sind beide Teilintegrale (Summanden) konvergent, dann wird das Paley-Wiener-Kriterium bestätigt.
2. Sollte ein Teilintegral und ein Summenintegral konvergent sein, dann muß es das andere Teilintegral auch (und das Paley-Wiener-Kriterium ist ebenfalls verifiziert).

Nach Voraussetzung (1.27) ist $|H(\mathrm{j}\omega)|$ quadratisch integrierbar, wodurch sich (mit der Ungleichung $x > \ln x$) folgende Relationen für die positiven Werte von $\ln|H(\mathrm{j}\omega)|$ ergeben:

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{j}\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega > 2\int_{-\infty}^{\infty} A_+(\omega)\,\mathrm{d}\omega > 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Damit ist die Konvergenz eines Teilintegrals schon nachgewiesen und es bietet sich an[27], einen Existenzbeweis für das (analytisch einfach behandelbare) Summenintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|H(\mathrm{j}\omega)|}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega < \infty$$

[27] Die Beschränktheit des Teilintegrals für $A_-(\omega)$ in gleicher Art und Weise wie für $A_+(\omega)$ nachzuweisen scheitert im Wesen daran, daß die Ungleichung $|H(\mathrm{j}\omega)| > \ln|H(\mathrm{j}\omega)|$ nicht hilfreich eingesetzt werden kann (in Beziehung zur quadratischen Integrierbarkeit von $|H(\mathrm{j}\omega)| < 1$).

zu erbringen. Dazu gehen wir in die komplexe $\mathcal{L}$-Ebene über

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{Re}\left[-\mathrm{j}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{A(\mathrm{j}\omega)}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}(\mathrm{j}\omega)\right] = \mathrm{Re}\left[-\mathrm{j}\int_{s=-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{A(s)}{1-s^2}\,\mathrm{d}s\right] \tag{1.29}$$

und zerlegen das rechte Integral[28] wiefolgt:

$$\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{A(s)}{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{A(s)}{s+1}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{A(s)}{s-1}\,\mathrm{d}s\,.$$

Die beiden Teilintegrale können nun durch Kurvenintegration auf dem halbkreisförmigen (rechts liegendem) Weg nach Abbildung D.5 bestimmt werden. Die Rechnung soll an dieser Stelle jedoch nicht durchgeführt werden, statt dessen die bekannten Ergebnisse aus der Funktionentheorie zur Anwendung kommen:

- Bei dem rechten Kurvenintegral handelt es sich wegen der Polfreiheit von $A(s)$ in der rechten Halbebene um Cauchy's Integralformel D.46 in der (rechten) Halbebene für den Funktionswert $z_0 = 1$.

$$-\frac{1}{2}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{A(s)}{s-1}\,\mathrm{d}s = \mathrm{j}\pi\,\mathrm{res}_1 \frac{A(s)}{s-1} = \mathrm{j}\pi A(1) < \infty$$

- Das linke Integral verschwindet nach dem Satz von Cauchy (D.10) für $\mathrm{Re}\,s \geq 0$, denn alle Pole von $A(s)$ selbst sowie $\underset{\times}{s} = -1$ liegen in der linken Halbebene.

Einsetzen der letzten beiden Ergebnisse in Zwischenformel 1.29 zeigt, daß für stabile, kausale Minimalphasensysteme das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|H(\mathrm{j}\omega)|}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \pi\,\mathrm{Re}\,A(1) = \pi\ln|H(1)| \tag{1.30}$$

konvergiert.

[28] Wobei wir auch den Imaginärteil des Ausdrucks berücksichtigen, denn bei minimalphasigen LTI-Systemen besteht ein determinierter Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion und deshalb auch zwischen Dämpfung und Phase (vgl. Abschnitt 1.4).

2. Tiefpaßfilter

2.1. Approximation im Frequenzbereich

2.1.1. Approximationsziel

Bei der Annäherung einer Zielfunktion im Frequenzbereich sind im allgemeinen zwei systemtheoretische Größen interessant: die Dämpfung $A(\omega) = -20\log\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$ sowie der Phasengang $B(\omega) = -\measuredangle H(\mathrm{j}\omega)$. Fast alle Standard-Tiefpässe beschränken sich dabei auf die gleichmäßige (Tschebyscheff-) Approximation des Amplitudenganges[1] $H(\omega) = \left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$, vgl. [Gui52, Gui57, Win54, Zve67, Fri79a, Mil92]. Dazu wird üblicherweise statt der Amplitudencharakteristik $H(\omega)$ die charakteristische Funktion $D(\omega) = \left|D(\mathrm{j}\omega)\right|$, welche auch Drosselung genannt wird, herangezogen. Als Zusammenhang zwischen beiden Größen gilt bekanntlich:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2(\omega)}} \,. \tag{2.1}$$

Es gibt verschiedene Gründe die Drosselung als Zielfunktion zu verwenden (siehe auch [SU58, Win54, Fri79a, Zve67]):

1. Aus Sicht der technischen Realisierbarkeit sind die Einschränkungen in Bezug auf die reellen Koeffizienten des Nenner- und Zählerpolynoms von $D(\omega)$ viel schwächer, d. h. fast jede rationale Funktion ist hier erlaubt[2] [Zve67, 2.15].
2. Die Drosselung bringt das Filter-Problem einerseits gut zum Ausdruck (Approximation der Null-Linie im Durchlaßbereich), andererseits können bekannte mathematische Lösungen (die üblicherweise Standardintervalle approximieren) relativ problemlos verwendet werden [Zve67, 2.9].
3. An Reaktanz- (LC-) Vierpolen, welche allerdings vorwiegend historische Bedeutung haben, entspricht die Drosselung genau dem Verhältnis zwischen reflektierter und abgegebener Ausgangsleistung [Zve67, 2.1].

Für die Verwendung bekannter mathematischer Lösungsfunktionen der gleichmäßigen Approximation (bezeichnet mit $g(x)$) macht es sich außerdem günstig, die Drosselung als Produkt von $g(x)$ mit einer Konstanten σ zu definieren.

[1] Insbesondere die Zeitfunktionen Impuls- und Sprungantwort, welche für verschiedene Filtertypen z. B. sehr schön in [HK58] dargestellt sind, werden dann einfach hingenommen.

[2] Im Gegensatz dazu muß z. B. der Nenner der Übertragungsfunktion $H(s)$ immer ein Hurwitzpolynom sein.

$$D(\omega) = \sigma\, g(\omega) \tag{2.2}$$

In Tabelle 2.1 sind nun ausgewählte Approximationsintervalle bzw. -punkte sowie die Zusammenhänge mit den soeben eingeführten Größen dargelegt.

Tabelle 2.1.: Approximationskenngrößen

	$g(\omega)$	$D(\omega)$	$H(\omega)$	$A(\omega)$
Durchlaßbereich	0	0	1	0
	1	σ	$\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}$	$10\log\left(1+\sigma^2\right)$
Sperrbereich	∞	∞	0	∞

Die Definition von Durchlaß- und Sperrbereich beruht auf dem Fakt, daß (fast) alle konventionellen Standard-Filter den idealen Tiefpaß (zumindest stückweise) approximieren. Es wird deshalb für den Durchlaßbereich das Intervall $0 \leq \omega \leq \omega_g$ angenommen[3], für den Sperrbereich $\omega_s \leq \omega < \infty$. Man erhält damit ein Tiefpaß-Toleranzschema nach Abbildung 2.1, das außerdem eine maximale (erlaubte) Durchlaß-Dämpfung $A_{\max}$ und eine minimale Sperr-Dämpfung $A_{\min}$ definiert[4].

Im Zusammenhang mit der Approximationsfunktion soll noch kurz angemerkt sein, daß die Extremstellen der Dämpfung sich auf der Grundlage von

$$A(\omega) = -20\log\left|H(\mathrm{j}\omega)\right| = 10\log\left[1+D^2(\omega)\right] = 10\log\left[1+\sigma^2 g^2(\omega)\right]$$

aus den Nullstellen von $g(\omega)$ als auch deren Ableitung $g'(\omega)$ zusammensetzen.

$$\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{10}{\ln 10}\cdot\frac{2\sigma^2 g(\omega)\,g'(\omega)}{1+\sigma^2 g^2(\omega)} \qquad \Rightarrow \qquad g(\omega)\,g'(\omega) = 0\Big|_{\omega=\omega_\circ}$$

2.1.2. Bestapproximationen

P. L. Tschebyscheff hat im 19. Jahrhundert mit dem nach ihm benannten *Alternantensatz* die grundlegende Bedingung für eine Bestapproximation gefunden [Tsc07, Mei64, Kör88]. In kur-

[3] Wobei normalerweise mit normierten Frequenzen gearbeitet und deshalb oftmals $\omega_g = 1$ gesetzt wird.
[4] Gleichbedeutend mit der Forderung $D(\omega) \Rightarrow \infty$ für den Sperrbereich ist $1/D(\omega) \Rightarrow 0$.

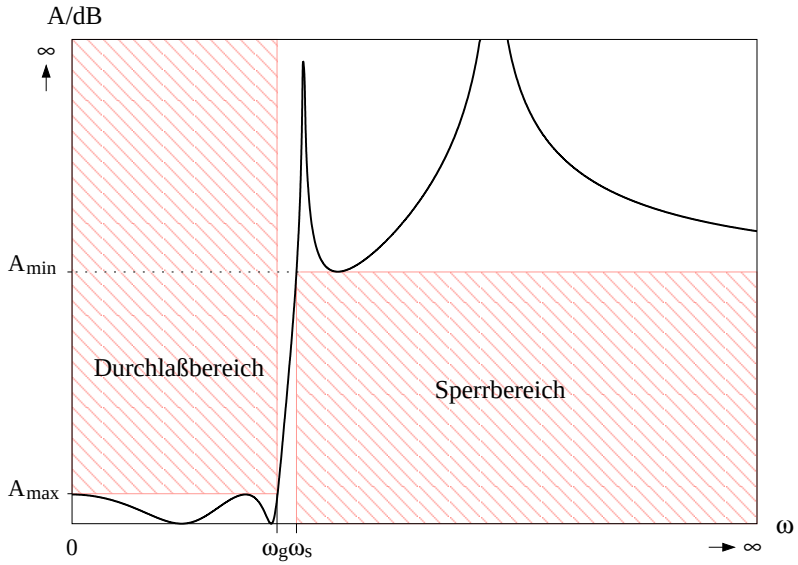


Abbildung 2.1.: Tiefpaß-Toleranzfeld

zer Form ist der Inhalt folgender:

> Eine Bestapproximation[5] $g_n(x; c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2, c_1)$ der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ durch eine Funktion geringster Abweichung $g(x)$, d. h. eine Näherung für die folgende Tschebyscheff-Norm gilt:
>
> $$\|f - g_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g_n(x)| \Rightarrow \text{Min.} \tag{2.3}$$
>
> ist dadurch gekennzeichnet, daß die Fehlerfunktion $\varepsilon(x) = f(x) - g_n(x)$ an $n+1$ verschiedenen Punkten x_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ alternierend den Wert $\pm\varepsilon$ annimmt. Dabei muß der Punkt x_0 genau auf den Intervallanfang a und x_n auf den Endpunkt b fallen.

In der Filtertheorie ist die (gesuchte) Funktion g_n geringster Abweichung[6] meist die Drosselung $D(\omega)$. Die zu approximierende Funktion $f(x)$ kann als Drosselung des (fast) idealen Tiefpaß verstanden werden.

[5] Im Sinne der Bestimmung von $c_1, c_2, \ldots, c_n$, wenn n die Dimension des durch $g_n(x)$ aufgespannten Raumes ist.

[6] Weitere Normen und Fehlermaße sowie die Beziehung zwischen Fehlern im Frequenz- und Zeitbereich faßt z. B. [Gum58] zusammen.

$$f(\omega) = \begin{cases} 0 & (0 \leq \omega \leq \omega_g) \\ \infty & (\omega_s \leq \omega < \infty) \end{cases}$$

Genau an dieser Stelle unterscheiden sich nun die Standard-Tiefpässe dadurch, daß jeder Typ die Zielfunktion $f(\omega)$ in anderen Frequenzbereichen approximiert. Abgesehen davon ist jede dieser Bestapproximationen, welche ja als Zielgröße $D(\omega)$ verwenden, auch eine in Bezug auf $H(\omega)$. Der Grund ist in Ausgangsgleichung 2.1 zu finden, welche nur eine direkte Abhängigkeit $H(D)$ und keine weitere von ω enthält. Aus diesem Grund unterscheiden sich zwar die Fehlerfunktion $\varepsilon(\omega)$ im Wert, nicht aber im alternierenden Verhalten.

Geht man nun von einer Bestapproximation (wie in Abbildung 2.1 getan) aus, dann kann man den Frequenz-Eckwerten ω_g und ω_s, da es sich um die Randpunkte handelt, die Dämpfungswerte A_{min} und A_{max} zuordnen.

$$A_{\text{min}} = 10\log[1 + D^2(\omega_s)] \qquad A_{\text{max}} = 10\log[1 + D^2(\omega_g)]$$

Umgekehrt kann man aus vorgegebenen Dämpfungswerten den Skalierungsfaktor σ bestimmen.

$$\sigma = \frac{\sqrt{10^{A_{\text{min}}/10} - 1}}{D(\omega_s)} = \frac{\sqrt{10^{A_{\text{max}}/10} - 1}}{D(\omega_g)}$$

2.2. Butterworth-Tiefpaß

2.2.1. Amplitudencharakteristik

Der Butterworth-Tiefpaß n-ter Ordnung zeichnet sich durch die Amplitudencharakteristik

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2\omega^{2n}}} \tag{2.4}$$

aus [Zve67, Che95, Fri79a], besitzt also nach Gleichung 2.1 die Drosselung

$$D(\omega) = \sigma\omega^n \,. \tag{2.5}$$

Da die Kreisfrequenz ω nur in der höchsten Potenz vorhanden ist, werden solche Systeme auch Potenzfilter genannt und als maximal flach[7] bezeichnet [Fri79a] [Win54]. Abbildung 2.2 zeigt den Amplitudengang nach Formel 2.4 für unterschiedlichen Grad n.

Mit Hilfe des Parameters σ kann die maximale Dämpfung im Durchlaßbereich $A_{\max}$ variiert werden (vgl. Abschnitt 2.1.1). Dazu sei von der normierten Grenzfrequenz $\omega_g = 1$ ausgegangen, bei der

$$H(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{H^2(1)} - 1}, \qquad (\omega_g = 1)$$

gilt und deshalb für die maximale Dämpfung:

$$A_{\max} = -20\log H(\omega_g) = 10\log(1+\sigma^2), \qquad \sigma = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1}\,.$$

In gleicher Art und Weise kann man für die minimale Dämpfung im Sperrbereich

[7] Als maximal flach werden Funktionen der Ordnung n bezeichnet, deren erste bis $n-1$ -te Ableitung an einer ausgewählten Stelle (hier $\omega = 0$) verschwinden, die n -te jedoch nicht.

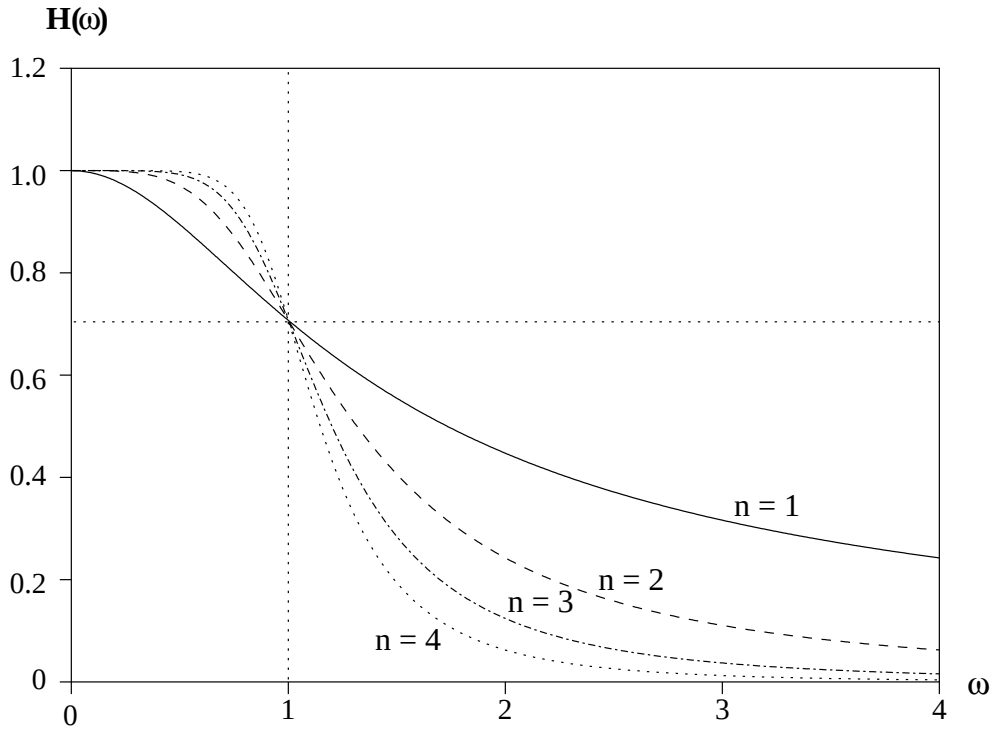


Abbildung 2.2.: Amplitudengang des BUTTERWORTH-Tiefpaß

$$A_{\min} = -20\log H(\omega_s) = 10\log(1+\sigma^2\omega_s^{2n}), \qquad \sigma = \frac{\sqrt{10^{A_{\min}/10}-1}}{\omega_s^n}$$

erhalten, d. h. die charakteristischen Größen ω_g, ω_s, $A_{\max}$ und $A_{\min}$ sind nicht unabhängig voneinander. Der über den Grad n bestehende Zusammenhang kann durch Gleichsetzen der Beziehungen für σ ausgedrückt werden.

$$10^{A_{\min}/10} - 1 = \omega_s^{2n}(10^{A_{\max}/10} - 1)$$

Aus dieser Äquivalenz kann der minimale Grad eines BUTTERWORTH-Tiefpaß' ausgehend von den charakteristischen Größen abgeleitet werden ($\omega_g = 1$).

$$n \geq \frac{\log\sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}}}{\log\omega_s} \tag{2.6}$$

Oft werden Filter in Bezug auf ihre 3dB-Grenzfrequenz $\omega_g = \omega_{3\text{dB}}$, d. h. auf $H(1) = 1/\sqrt{2}$, dimensioniert. Dann gilt $\sigma = 1/\omega_{3\text{dB}}^n$ und für den Amplitudengang

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{3\text{dB}}}\right)^{2n}}} \,. \tag{2.7}$$

2.2.2. Polstellen

Die Verteilung der Polstellen eines Filters (in der komplexen Ebene) ist grundsätzlich immer interessant, da sie Aufschlüsse bezüglich der anderen Charakteristiken, wie Amplitudengang, Phasengang, usw. zuläßt. Dazu gehen wir von der komplexen Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$, in Verbindung mit der generellen Eigenschaft $H^2(\omega) = H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega)$, aus.

$$H^2(\omega) = H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\sigma^2\omega^{2n}}$$

Der Übergang in den Laplace-Bereich (mit $\mathrm{j}\omega \Rightarrow s$) führt zu[8]:

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\sigma^2\,(s/\mathrm{j})^{2n}} \,. \tag{2.8}$$

An den Polstellen von $H(s)H(-s)$ muß der Nenner in Gleichung 2.8 verschwinden, was bedeutet:

$$\begin{aligned} 1+\sigma^2\left(\frac{s}{\mathrm{j}}\right)^{2n} &= 0 \\ s^{2n} &= (-1)^{n+1}\sigma^{-2} \,. \end{aligned}$$

Die komplexen $2n$ Wurzeln lassen sich mit Hilfe des Satzes von Moivre[9] sofort angeben:

$$s_k = \frac{1}{\sqrt[n]{\sigma}} \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{\pi}{n}} & (n \text{ ungerade}) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n}} & (n \text{ gerade}) \end{cases} \,, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1 \,.$$

[8] Für kausale, stabile Tiefpaßsysteme ist der Übergang von der Fourier zur Laplace-Transformierten immer möglich [Pap62, 9-2].

[9] In seiner Exponentialform $z^n = r^n e^{\mathrm{j}n\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \measuredangle z$.

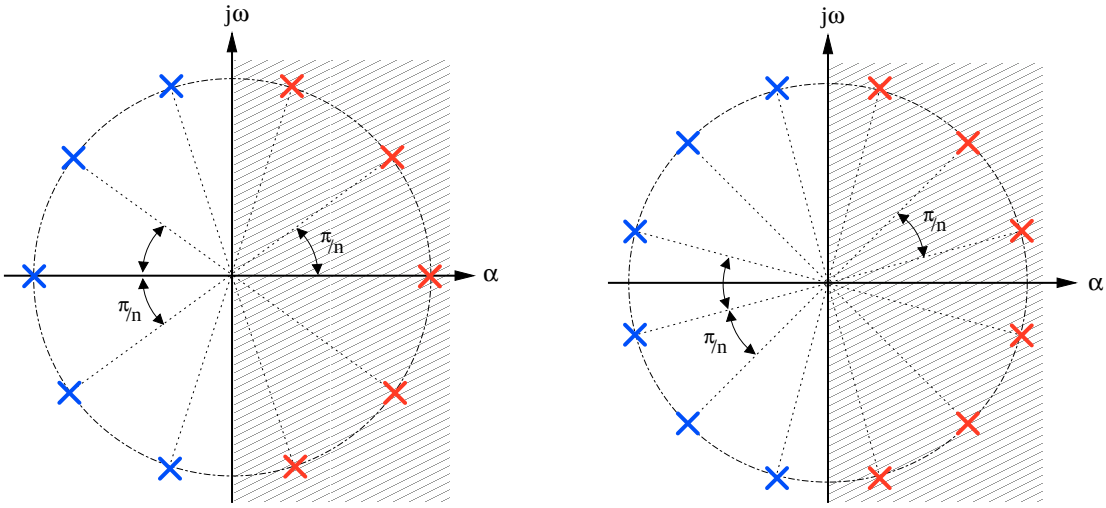
Um realisierbare Systeme zu erhalten ordnet man nun n Pole mit negativem Realteil $H(s)$, die anderen $H(-s)$ zu. Man erhält, was sich durch Einsetzen einzelner Werte k leicht nachprüfen läßt, folgende Polverteilung für einen BUTTERWORTH-Tiefpaß.

$$\underset{\times}{s}_\nu = \frac{1}{\sqrt[n]{\sigma}}\, e^{j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}} = \frac{j}{\sqrt[n]{\sigma}}\, e^{j\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}}, \qquad \nu = 1,2,\ldots,n \tag{2.9}$$

Sind insbesondere Real- oder Imaginärteile von Interesse, dann ist auf Gleichung 2.9 noch die EULER'sche Formel anzuwenden.

$$\underset{\times}{s}_\nu = \frac{1}{\sqrt[n]{\sigma}}\left[-\sin\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) + j\cos\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\right], \qquad \nu = 1,2,\ldots,n \tag{2.10}$$

Anschaulich liegen alle Pole auf einem Kreis mit Radius $1/\sqrt[n]{\sigma}$, was deutlich auch in Abbildung 2.3 zu erkennen ist. Außerdem zeigt die Darstellung, daß einerseits keine Pole auf der imaginären Achse liegen und andererseits alle konjugiert komplex auftreten[10].



(a) n ungerade ($n = 5$) (b) n gerade ($n = 6$)

Abbildung 2.3.: P/N-Verteilung des BUTTERWORTH-Tiefpaß

[10] Abgesehen von einem reellen Pol für ungeraden Grad n.

2.2.3. Polkenngrößen

Allgemein gelten Polkenngrößen als geeignet zur Abschätzung des Systemverhaltens im Frequenzbereich. Dabei sind es vor allem zwei Größen, die entsprechende Bedeutung erlangt haben – die Polfrequenz ω_0 und die Polgüte[11] Q. Zur Definition bzw. Bestimmung geht man von der Erkenntnis aus, daß komplexe Pole immer konjugiert auftreten und deshalb in der Linearfaktordarstellung von $H(s)$ paarweise (zur Vermeidung komplexer Größen) zusammengefaßt werden können.

$$(s-\underset{\times}{s})(s-\underset{\times}{s}^*) = s^2 - 2s\,\mathrm{Re}(\underset{\times}{s}) + \mathrm{Re}^2(\underset{\times}{s}) + \mathrm{Im}^2(\underset{\times}{s})$$

Dieses Polynom zweiten Grades (bezüglich der Laplace-Variable s) kann man auch folgendermaßen schreiben

$$(s-\underset{\times}{s})(s-\underset{\times}{s}^*) = s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2, \tag{2.11}$$

wodurch Polfrequenz und -güte letztlich definiert werden. Koeffizientenvergleich beider Darstellungen, also

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = s^2 - 2s\,\mathrm{Re}(\underset{\times}{s}) + \mathrm{Re}^2(\underset{\times}{s}) + \mathrm{Im}^2(\underset{\times}{s})$$

führt sofort zur Definition der Polfrequenz ω_0 als Betragswert der jeweiligen Polstelle $\underset{\times}{s}_\nu$.

$$\omega_0 = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\underset{\times}{s}) + \mathrm{Im}^2(\underset{\times}{s})} = \left|\underset{\times}{s}\right| \tag{2.12}$$

Die Polgüte Q ist nicht sofort ablesbar, kann aus

[11] Manchmal wird statt der Polgüte Q die Poldämpfung $(2Q)^{-1}$ als Maßzahl herangezogen.

$$\frac{\omega_0}{Q} = -2\,\mathrm{Re}(\underset{\times}{s})$$

$$Q = -\frac{\omega_0}{2\,\mathrm{Re}(\underset{\times}{s})} = -\frac{|\underset{\times}{s}|}{2\,\mathrm{Re}(\underset{\times}{s})}$$

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{1+\left[\frac{\mathrm{Im}(\underset{\times}{s})}{\mathrm{Re}(\underset{\times}{s})}\right]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\tan^2(\measuredangle\,\underset{\times}{s})}$$

aber ohne größeren Aufwand bestimmt werden[12]:

$$Q = -\frac{1}{2\cos(\measuredangle\,\underset{\times}{s})} = -\frac{1}{2}\sec(\measuredangle\,\underset{\times}{s})\,. \tag{2.13}$$

Speziell für einen BUTTERWORTH-Tiefpaß gilt deshalb in Bezug auf die Polfrequenzen:

$$\omega_0 = |\underset{\times}{s}_\nu| = \frac{1}{\sqrt[n]{\sigma}} = \text{ konstant}$$

und Polgüte:

$$Q_\nu = -\frac{1}{2}\sec\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{cosec}\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right), \qquad \nu = 1,2,\ldots,n\,. \tag{2.14}$$

In der letzten Formel ist erkennbar, daß die einzelnen Polgüten Q_ν für höhere Filterordnung n immer größer werden, wobei Pole in der Nähe der $\mathrm{j}\omega$-Achse die höchsten Güten aufweisen[13].

[12] Wobei hier $\mathrm{Re}(\underset{\times}{s}) < 0$ vorausgesetzt wurde.

[13] Pole mit dieser Lage reagieren dann im allgemeinen auch viel empfindlicher auf Bauelemente-Toleranzen.

2.3. Tschebyscheff-Tiefpaß

2.3.1. Amplitudencharakteristik

Der erste Typ des Tschebyscheff-Tiefpaß ist durch direkte Anwendung der Tschebyscheff-Funktionen erster Art (siehe Anhang B.1) für die Drosselung gekennzeichnet [Zve67, Che95, Fri79a].

$$D(\omega) = \sigma \mathrm{T}_n(\omega) \tag{2.15}$$

Man kann sich auch leicht an Hand der folgenden Definition für $\mathrm{T}_n(\omega)$ davon überzeugen, daß die Funktion im Intervall $|\omega| < 1$ eine Bestapproximation der Nullinie (im Sinne von Abschnitt 2.1.2, vgl. auch [Kör88, 45] oder [Mei64, § 4]) darstellt, für $|\omega| > 1$ aber gegen $\pm\infty$ strebt.

$$\mathrm{T}_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \omega) & (|\omega| \leq 1) \\ \cosh(n \operatorname{arcosh} \omega) & (|\omega| > 1) \end{cases}$$

Daß es sich hier wirklich um Polynome in ω handelt, zeigt die äquivalente Definitionsgleichung B.4 für $\mathrm{T}_n(x)$ im Anhang B.2.1.3. Dort sind auch Tschebyscheff-Polynome bis zum Grad $n = 5$ sowie ihr Funktionsverlauf (in Abbildung B.1) gegeben. Wie spezielle Werte des Funktionsverlaufs von $\mathrm{T}_n(x)$ sich auf den normierten Amplitudengang nach

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2 \mathrm{T}_n^2(\omega)}} \tag{2.16}$$

auswirken, kann (auch mit Rückblick auf Tabelle 2.1) anschaulich Abbildung 2.4 entnommen werden.

Die Grenzfrequenz ist bei diesem Tiefpaß-Typ immer normiert $\omega_g = 1$, zumindest soweit man sie als Eckfrequenz entsprechend Tiefpaß-Toleranzfeld in Abbildung 2.1 sieht. Der Amplitudengang hat im Durchlaßbereich eine Welligkeit, welche durch die Tschebyscheff-Funktion verursacht wird (vgl. Abbildung B.1). Sie nimmt an den Extremstellen $\cos(k\pi/n)$ alternierend die Werte ± 1 an – dazwischen liegen (notwendigerweise) die Nullstellen bei $\cos[(k - 1/2)\pi/n]$. Kombiniert man beide Ausdrücke, dann erhält man die Extremstellen des Amplitudengangs.

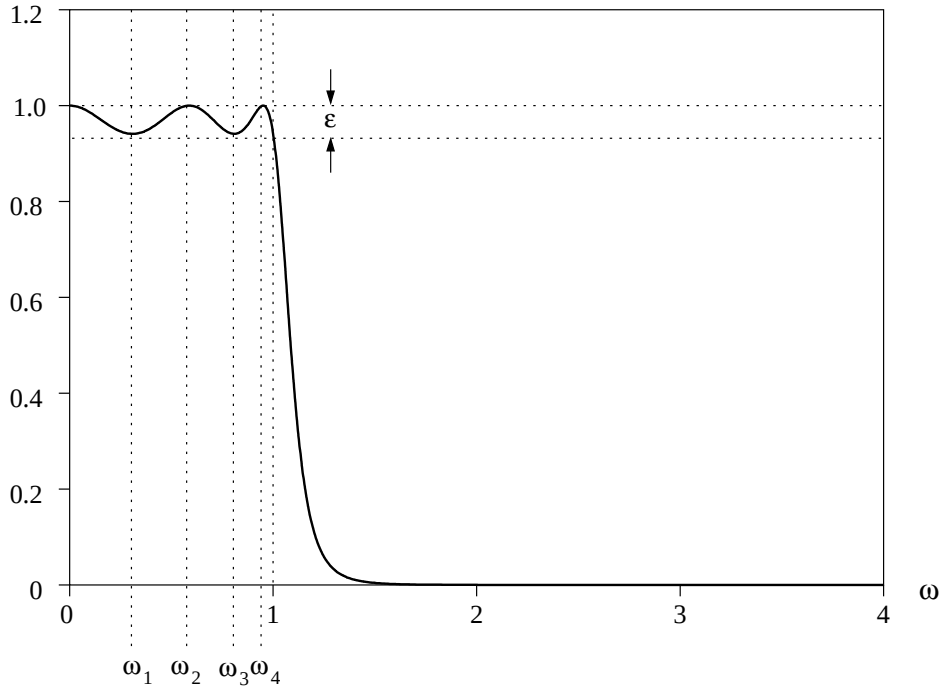


Abbildung 2.4.: Amplitudengang des TSCHEBYSCHEFF-Tiefpaß Typ I

$$\omega_k = \cos\left(k\frac{\pi}{2n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

An diesen Stellen ist $H(\omega)$ nach Tabelle 2.1 entweder 1 oder $(1+\sigma^2)^{-1/2}$ und die Welligkeit ε deshalb:

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \; .$$

Wie schon beim BUTTERWORTH-Tiefpaß besteht ein determinierter Zusammenhang zwischen der Grenz- und Sperrfrequenz sowie der minimalen und maximalen Sperrdämpfung.

$$A_{\max} = -20\log H(\omega_g) = 10\log(1+\sigma^2), \qquad \sigma = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1}$$

$$A_{\min} = -20\log H(\omega_s) = 10\log\left[1+\sigma^2\cosh^2(n\,\mathrm{arcosh}\,\omega_s)\right], \qquad \sigma = \frac{\sqrt{10^{A_{\min}/10} - 1}}{\cosh(n\,\mathrm{arcosh}\,\omega_s)}$$

Aus diesen Abhängigkeiten kann man durch Gleichsetzen der Ausdrücke für σ wieder den minimalen Grad des Filters bestimmen.

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{10^{A_{\min}/10}-1}{10^{A_{\max}/10}-1}}}{\operatorname{arcosh} \omega_s} \tag{2.17}$$

2.3.2. Polstellen

Um die Verteilung der Polstellen zu bestimmen, gehen wir von der komplexen Übertragungsfunktion $H^2(\omega) = H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega)$ aus

$$H^2(\omega) = H(\mathrm{j}\omega)H(-\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+\sigma^2\,\mathrm{T}_n^2(\omega)}$$

und verallgemeinern dann im Sinne der Laplace-Transformation $\mathrm{j}\omega \Rightarrow s$.

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\sigma^2\,\mathrm{T}_n^2(s/\mathrm{j})}\ .$$

An den Polstellen muß der Nenner verschwinden, was heißt:

$$1+\sigma^2\,\mathrm{T}_n^2\left(\frac{s}{\mathrm{j}}\right) = 0$$

$$\mathrm{T}_n\left(\frac{s}{\mathrm{j}}\right) = \cos\left(n \arccos\frac{s}{\mathrm{j}}\right) = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\sigma}\ . \tag{2.18}$$

Wegen $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ müssen wir davon ausgehen, daß $\arccos(s/\mathrm{j})$ eine komplexe Größe ist. Um nicht den Überblick zu verlieren substituieren wir $z = u + \mathrm{j}v = \operatorname{Re} z + \mathrm{j}\operatorname{Im} z = \arccos(s/\mathrm{j})$ und notieren als komplexe Gleichung:

$$\cos(nu + \mathrm{j}nv) = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\sigma}\ .$$

Nimmt man das Additionstheorem $\cos(\varphi+\vartheta) = \cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta$ hinzu, dann sind die Gleichungen

$$\cos(nu + \mathrm{j}nv) = \cos(nu)\cos(\mathrm{j}nv) - \sin(nu)\sin(\mathrm{j}nv) = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\sigma}$$
$$\cos(nu)\cosh(nv) - \mathrm{j}\sin(nu)\sinh(nv) = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\sigma}$$

äquivalent und wir können die Nullstellenbedingung in Real- und Imaginärteil separieren.

$$\cos(nu)\cosh(nv) = 0 \qquad\qquad -\sin(nu)\sinh(nv) = \pm\frac{1}{\sigma}$$

Der Realteil wird Null, wenn $\cos(nu) = 0$ gilt, was für Argumente $n\underset{\times}{u}_k = k\pi - \pi/2$ bzw. $\underset{\times}{u}_k = \pi(2k-1)/2n$ der Fall ist. Einsetzen in die imaginäre Bedingung führt zu

$$-\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sinh(nv) = \pm\frac{1}{\sigma}$$
$$\pm\sinh(nv) = \pm\frac{1}{\sigma}$$
$$v = \frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\sigma} = \text{konstant.}$$

Mit diesen Ergebnissen kehren wir zur Substitution $\cos\underset{\times}{z}_k = \underset{\times}{s}_k/\mathrm{j}$ zurück und wenden (wieder) das komplexe Additionstheorem $\cos(u + \mathrm{j}v) = \cos u\,\cosh v - \mathrm{j}\sin u\,\sinh v$ an.

$$\begin{aligned}\underset{\times}{s}_k &= \mathrm{j}\cos\underset{\times}{z}_k = \mathrm{j}\cos(\underset{\times}{u}_k + \mathrm{j}v)\\ &= \mathrm{j}\cos\underset{\times}{u}_k\,\cosh v + \sin\underset{\times}{u}_k\,\sinh v\end{aligned}$$

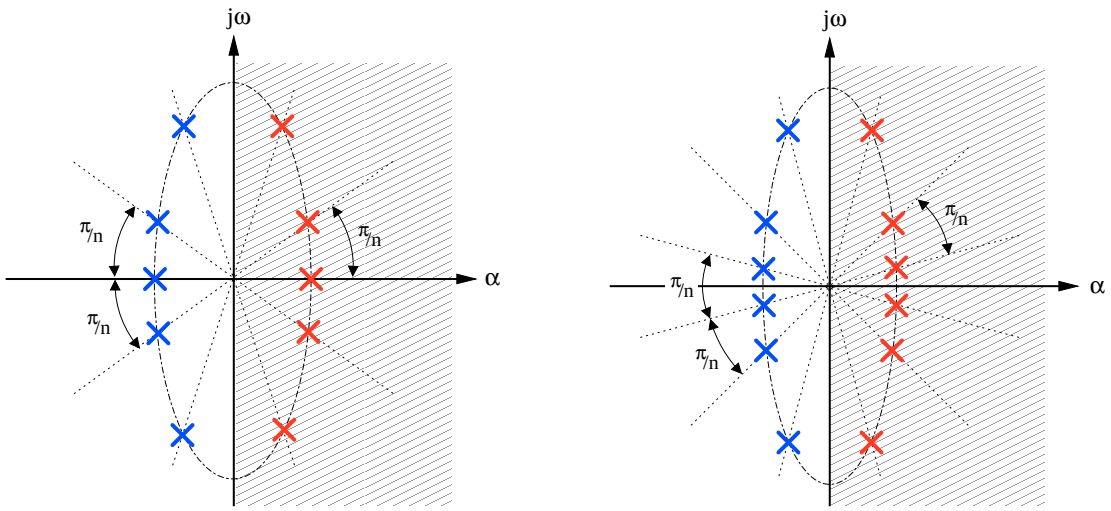
Einsetzen von u und v ergibt für die $2n$ Polstellen der Funktion $H(s)H(-s)$, getrennt für Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\underset{\times}{s}_k &= \sinh\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\sigma}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\\ \operatorname{Im}\underset{\times}{s}_k &= \cosh\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\sigma}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Interpretiert man beide Anteile geometrisch, dann ist zu bemerken, daß alle Pole auf einer Ellipse[14] mit den Halbachsen

$$\alpha_H = \sinh\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\sigma}\right) \qquad \omega_H = \cosh\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\sigma}\right) \tag{2.19}$$

liegen (siehe auch Abbildung 2.5). Wegen der für Hyperbelfunktionen immer geltenden Äquivalenz $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$ besteht zwischen den Halbachsen die Abhängigkeitsbeziehung $\omega_H^2 - \alpha_H^2 = 1$.



(a) n ungerade ($n = 5$) (b) n gerade ($n = 6$)

Abbildung 2.5.: P/N-Verteilung des Tschebyscheff-Tiefpaß Typ I

Abschließend wählen wir die Hälfte der $2n$ Pole, nämlich (aus Stabilitätsgründen) die mit negativem Realteil aus, und ordnen sie $H(s)$ zu[15].

$$s_{\times\nu} = -\alpha_H \sin\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\omega_H \cos\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right), \qquad \nu = 1,2,\ldots,n \tag{2.20}$$

[14] Die Parameterdarstellung der Ellipse lautet: $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, wobei a und b die Halbachsen sind.

[15] Wobei praktischerweise mit $\nu = k - n$ um-indiziert, das Argument der trigonometrischen Funktionen also um π verschoben wird.

Geschlossene Darstellungen für die Polfrequenzen und -güten (abgeleitet aus den allgemeinen Formeln 2.12 und 2.13) nehmen bei diesem Filtertyp schon einige Komplexität an. Deshalb sollte man sich zu deren Bestimmung entweder mit einer Softwareimplementierung oder entsprechenden Tabellen, wie z. B. in [Fri79a, Tab. 2.5], behelfen.

2.4. Inverser Tschebyscheff-Tiefpaß

2.4.1. Amplitudencharakteristik

Der Tschebyscheff-Tiefpaß vom Typ II ist ebenfalls eine Anwendung der Tschebyscheff-Funktionen erster Art – diesmal aber so, daß eine Welligkeit im Durchlaßbereich vermieden wird, dafür aber Dämpfungsminima im Sperrbereich hingenommen werden müssen [Fri79a, 2.2.1.1]. Aus mathematischer Sicht handelt es sich um eine Bestapproximation der "Konstanten" Unendlich für alle Frequenzen größer als die Sperrfrequenz ω_s (siehe auch Abschnitt 2.1.2). Äquivalent dazu kann man die Forderung formulieren, daß $1/D(\omega)$ im Sperrbereich die Nullinie bestmöglich nähern möge[16]. Weil das (Best-) Approximationsintervall der Tschebyscheff-Funktionen im vorgenannten Sinne aber $[-1,+1]$ ist, muß eine entsprechende Abbildung auf den Sperrbereich erfolgen[17]. Aus diesen logischen Überlegungen heraus kann man die Drosselungsfunktion für den inversen Tschebyscheff-Tiefpaß ableiten.

$$D(\omega) = \sigma \frac{\mathrm{T}_n(\omega_s)}{\mathrm{T}_n(\omega_s/\omega)} \,. \tag{2.21}$$

Wie $D(\omega)$ sich auf der Grundlage von Formel 2.1 in einem typischen Dämpfungsverlauf darstellt zeigt Abbildung 2.6. Die maximale Dämpfung im Durchlaßbereich liegt an der normierten Grenzfrequenz $\omega_g = 1$ und hat den Wert:

$$A_{\max} = 10\log\left[1 + D^2(1)\right] = 10\log\left(1 + \sigma^2\right) \,.$$

Die minimale Dämpfung im Sperrbereich (inklusive ω_s) wird durch die Funktionswerte ± 1 an den Extremstellen von $\mathrm{T}_n(x)$ bestimmt (vgl. Anhang B.1).

$$A_{\min} = 10\log\left[1 + D^2(\omega_s)\right] = 10\log\left[1 + \sigma^2\,\mathrm{T}_n^2(\omega_s)\right] = 10\log\left[1 + \sigma^2\cosh^2(n\,\mathrm{arcosh}\,\omega_s)\right]$$

Die zugehörigen x-Werte liegen bei $\cos(k\pi/n)$, also bezüglich $\mathrm{T}_n(\omega_s/\omega)$ an den Stellen $\omega_s/\cos(k\pi/n)$. Die immer dazwischen liegenden Dämpfungsmaxima werden durch die Nullstellen der Tschebyscheff-Funktion erzeugt und sind deshalb bei $\omega_s/\cos[(k-1/2)\pi/n]$ lokalisiert. Kombiniert

[16] Genau dafür stellen die Tschebyscheff-Funktionen erster Art bekanntlich eine Bestapproximation dar.
[17] Hier durch geometrische Spiegelung von Durchlaß- und Sperrbereich um die Eckfrequenz ω_s.

man (wie beim TSCHEBYSCHEFF-Tiefpaß vom Typ I) auch hier beide Ausdrücke, so erhält man die Frequenzen ω_k nach Abbildung 2.6.

$$\omega_k = \omega_s \sec\left(k\frac{\pi}{2n}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

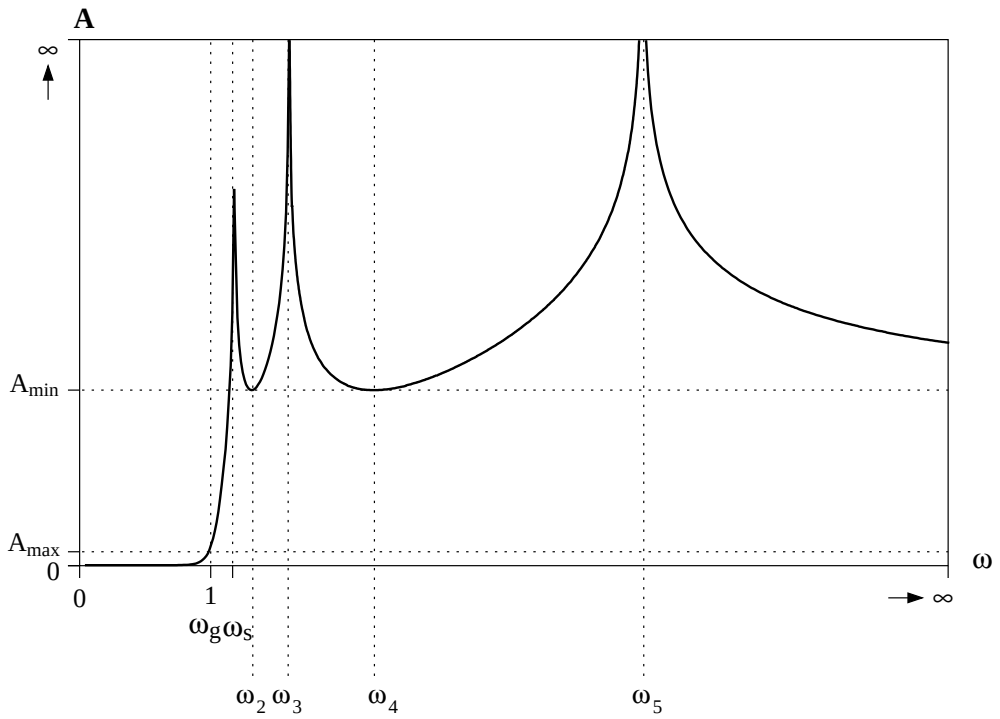


Abbildung 2.6.: Dämpfungsverlauf des TSCHEBYSCHEFF-Tiefpaß Typ II

Aufgrund der für $\omega \to \infty$ geltenden Tatsache

$$\lim_{\omega\to\infty} D(\omega) = \sigma\,\frac{\mathrm{T}_n(\omega_s)}{\mathrm{T}_n(0)} = \begin{cases} \infty & (n \text{ ungerade}) \\ \pm\sigma\,\mathrm{T}_n(\omega_s) & (n \text{ gerade}) \end{cases}$$

werden praktisch meist Tiefpässe mit ungeradem Grad bevorzugt.

2.4.2. Nullstellen

Im Gegensatz zum ersten Typ des TSCHEBYSCHEFF-Tiefpaß besitzt $H(s)$ hier Nullstellen, die wegen der Dämpfungsextrema im Sperrbereich sogar auf der $\mathrm{j}\omega$-Achse liegen müssen. Um sie zu bestimmen bilden wir (wie üblich) zuerst das Betragsquadrat der Übertragungsfunktion $H(\mathrm{j}\omega)$, gehen dann in den LAPLACE-Bildbereich über

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\sigma^2\,\mathrm{T}_n^2(\omega_s)/\,\mathrm{T}_n^2(\mathrm{j}\omega_s/s)} = \frac{\mathrm{T}_n^2(\mathrm{j}\omega_s/s)}{\mathrm{T}_n^2(\mathrm{j}\omega_s/s)+\sigma^2\,\mathrm{T}_n^2(\omega_s)} \tag{2.22}$$

und setzen den Zähler Null.

$$\mathrm{T}_n^2\left(\mathrm{j}\frac{\omega_s}{s}\right) = 0$$

Von der Betrachtung der Extremwerte her (vgl. voriger Abschnitt oder Anhang B.1) ist schon bekannt, daß die Nullstellen von $\mathrm{T}_n(x)$ bei

$$x_\nu = \mathrm{j}\frac{\omega_s}{s_\nu} = \cos\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)$$

liegen und deshalb bezüglich s bei

$$s_\nu = \mathrm{j}\omega_s \sec\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right), \qquad \nu = 1,2,\ldots,n-1,n\,. \tag{2.23}$$

Für den Fall eines Filters mit ungeradem Grad ist jedoch zu beachten, daß wegen $\cos(\pi/2) = 0$ die Nullstelle für $\nu = (n+1)/2$ im Unendlichen zum Liegen kommt. Aus diesem Grund kann sie nicht als solche angesehen werden, sondern eher als Hinweis, daß der Grad des Zählerpolynoms von $H(s)$ größer als der des Nennerpolynoms ist[18].

2.4.3. Polstellen

Zur Ermittlung der Pole von $H(s)$ kann man entweder formal die Polstellenbedingung für Gleichung 2.22 formulieren oder (was dasselbe ist) den höheren Zusammenhang zwischen Drosselung und Übertragungsfunktion nach Formel 2.1 berücksichtigen. Wählt man letzteren Ansatz, dann ist sofort erkennbar, daß alle Pole durch die Beziehung $D(s/\mathrm{j}) = \pm\mathrm{j}$ charakterisiert sind. Nehmen wir also die Drosselungsfunktion dieses Filtertyps nach Gleichung 2.21 und formulieren als Bedingung:

$$\sigma\,\mathrm{T}_n(\omega_s) = \pm\mathrm{j}\,\mathrm{T}_n\left(\mathrm{j}\frac{\omega_s}{s}\right)\,.$$

[18] Und damit auch zu einer (theoretisch) unbeschränkten Dämpfung für $\omega \to \infty$ führt.

Wegen der Ähnlichkeit mit Gleichung 2.18 des Typ I Tiefpaß substituieren wir $s' = -\omega_s/s$ und $1/\sigma' = \sigma\,\mathrm{T}_n(\omega_s)$ und erhalten:

$$\mathrm{T}_n\left(\frac{s'}{\mathrm{j}}\right) = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\sigma'}\,.$$

Nun steht einer Wiederverwendung der in Abschnitt 2.3.2 gewonnenen Lösung

$$s'_{\times\nu} = -\alpha_H \sin\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\omega_H \cos\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) \tag{2.24}$$

nichts mehr im Wege. Wir ersetzen nur noch die Zwischenvariablen (mit Strich) und erhalten für die Pole[19]:

$$\underset{\times}{s}_\nu = \frac{\omega_s}{-\alpha_H \sin\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right) + \mathrm{j}\omega_H \cos\left(\frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)}, \qquad \nu = 1,2,\ldots,n$$

sowie die Halbachsen (mit $\omega_H^2 - \alpha_H^2 = 1$) der elliptischen Verteilung:

$$\alpha_H = \sinh\left\{\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}[\sigma\,\mathrm{T}_n(\omega_s)]\right\} \qquad \omega_H = \cosh\left\{\frac{1}{n}\operatorname{arsinh}[\sigma\,\mathrm{T}_n(\omega_s)]\right\}\,. \tag{2.25}$$

Man verifiziert an Hand der Formeln, daß die Lage der Polstellen qualitativ dieselbe wie beim ersten Typ des TSCHEBYSCHEFF-Tiefpaß (siehe Abbildung 2.5) ist.

[19] Wobei das Minuszeichen in $\underset{\times}{s} = -\omega_s/s'_\times$ entfällt, wenn man genau die andere Menge der Pole (beim TSCHEBYSCHEFF-Tiefpaß Typ I) von $H(s)H(-s)$ dem stabilen System $H(s)$ zuordnet.

2.5. Cauer-Tiefpaß

2.5.1. Amplitudencharakteristik

W. Cauer hat unter anderem das Problem der Bestapproximation des idealen Tiefpaß-Amplitudengangs bzw. der charakteristischen Funktion (Drosselung) in seinen Arbeiten untersucht [Cau54]. Dabei ist er in wissenschaftlicher Art und Weise von der elektrotechnischen Problemstellung zur mathematischen Lösung gelangt. Wir wollen hier (der Kürze halber) auf die Erkenntnisse zu den elliptischen Haupt-Transformationen höherer Ordnung zurückgreifen[20], welche im Anhang C.4 dargestellt sind.

Für die Drosselungsfunktion $D(\omega)$ gibt es in der Literatur die verschiedensten Darstellungen [Cau54, VU89, Mil92, Zve67, Pil54, Fri79a, Che95], welche sich aber immer nur in der Skalierung von Amplituden- und Frequenzachse unterscheiden. Im Folgenden werden die Lösungsformeln C.125 und C.140 der ersten elliptischen Haupt-Transformation nach C. G. J. Jacobi als Ausgangspunkt dienen, die grundsätzliche Argumentation sich aber auf E. I. Solotareff und dessen drittes Approximationsproblem stützen[21].

Wir gehen also von den genannten Gleichungen C.125 und C.140 aus und definieren eine Funktion[22]

$$\mathrm{C}(x;k) = \begin{cases} \dfrac{x}{M} \displaystyle\prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \dfrac{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}{1-k^2a_\nu^2x^2} & (n \text{ ungerade}) \\ \displaystyle\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \dfrac{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}{1-k^2a_\nu^2x^2} & (n \text{ gerade}) \end{cases} \tag{2.26}$$

mit den Koeffizienten

$$a_\nu = \mathrm{sn}\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right) .$$

[20] Dieser Filtertyp ist eine konsequente Anwendung der elliptischen Transformationstheorie, welche schon im 19. Jahrhundert etabliert war.

[21] Solotareff's Problemstellung sowie dessen Lösungsformel **??** haben den kleinen Nachteil, daß der Durchlaßbereich nicht wie üblich am typischen Normierungswert $\omega_g = 1$, sondern bei $\omega_g = \sqrt{k}$ enden würde. Etwas eleganter würden dafür die Reziprozitätsbeziehungen 2.28 und 2.29 aussehen.

[22] Zu Ehren von W. Cauer mit dem Symbol C.

Der Parameter k wird das (elliptische) Modul genannt, welches auch häufig als Modulwinkel $k = \sin\Theta$ anzutreffen ist. Der Multiplikator M ist ein nach Formel C.135 (Seite 165) berechneter Vorfaktor. Die zur Berechnung der Koeffizienten benötigte Größe K ist das sogenannte elliptische Integral erster Art $K = \mathrm{K}(k)$ nach Anhang C.2.2. Mit sn wird der elliptische Sinus (vgl. Anhang C.3) abgekürzt.

Der Verlauf von $\mathrm{C}(x; k)$ ist in den Abbildungen C.15 und C.17 von Anhang C.4, welcher sich schwerpunktmäßig mit den Eigenschaften genau dieser elliptischen Transformationsfunktion(en) auseinandersetzt, dargestellt. $\mathrm{C}(x; k)$ ist hier vor allem deshalb von besonderem Interesse, da sie der Approximationsvorschrift eines CAUER-Tiefpaß', nämlich der gleichmäßigen Approximation des Dämpfungs- bzw. Amplitudenverlaufs im normierten Frequenzbereich $0 \leq \omega \leq 1$ und $\omega_s \leq \omega \leq \infty$, genau entspricht (vgl. SOLOTAREFF's drittes Problem in Anhang **??**). Wir setzen aus vorgenannten Gründen die skalierte Funktion $\mathrm{C}(\omega; k)$ als Drosselung an

$$D(\omega; k) = \sigma \mathrm{C}(\omega; k), \qquad \text{bzw. mit } \omega = \frac{s}{\mathrm{j}}$$

$$D(s; k) = \frac{s}{\mathrm{j}M} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1 + \frac{s^2}{a_\nu^2}}{1 + k^2 a_\nu^2 s^2} \qquad (n \text{ ungerade})$$

$$D(s; k) = \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1 + \frac{s^2}{a_\nu^2}}{1 + k^2 a_\nu^2 s^2} \qquad (n \text{ gerade})$$

und erhalten für die Amplitudencharakteristik

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2 \mathrm{C}^2(\omega; k)}} \,. \tag{2.27}$$

Mit den ebenfalls aus Anhang C.4 bekannten Werten

$$\mathrm{C}(1; k) = \pm 1 \qquad \mathrm{C}\left(\tfrac{1}{k}; k\right) = \frac{1}{\lambda}$$

lassen sich die Dämpfungswerte $A_{\max}$ und $A_{\min}$ aus dem Tiefpaß-Toleranzschema von Abbildung 2.1 angeben.

$$A_{\max} = -20\log H(1) = 10\log\Big[1 + D(\omega_g; k)\Big] = 10\log\Big(1 + \sigma^2\Big)$$
$$A_{\min} = -20\log H\left(\frac{1}{k}\right) = 10\log[1 + D(\omega_s; k)] = 10\log\left(1 + \frac{\sigma^2}{\lambda^2}\right)$$

mit

$$\lambda = k^n \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{\substack{n-1 \text{ (n gerade)} \\ n-2 \text{ (n ungerade)}}} \mathrm{sn}^4\left(\nu\tfrac{K}{n}; k\right)$$

Variation des Parameters k zeigt, daß er die Steilheit im Übergangsbereich $1 < \omega < \omega_s$, aber auch die Welligkeit im Durchlaßbereich bzw. Mindestdämpfung im Sperrbereich wesentlich beeinflußt. In Abbildung 2.7 ist der Dämpfungsverlauf eines Cauer-Tiefpaß für geraden und ungeraden Grad n dargestellt.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang eine Eigenschaft von Gleichung 2.26, welche ebenfalls der Transformationstheorie (vgl. Formel C.81 dort) der elliptischen Funktionen von Jacobi entspringt[23].

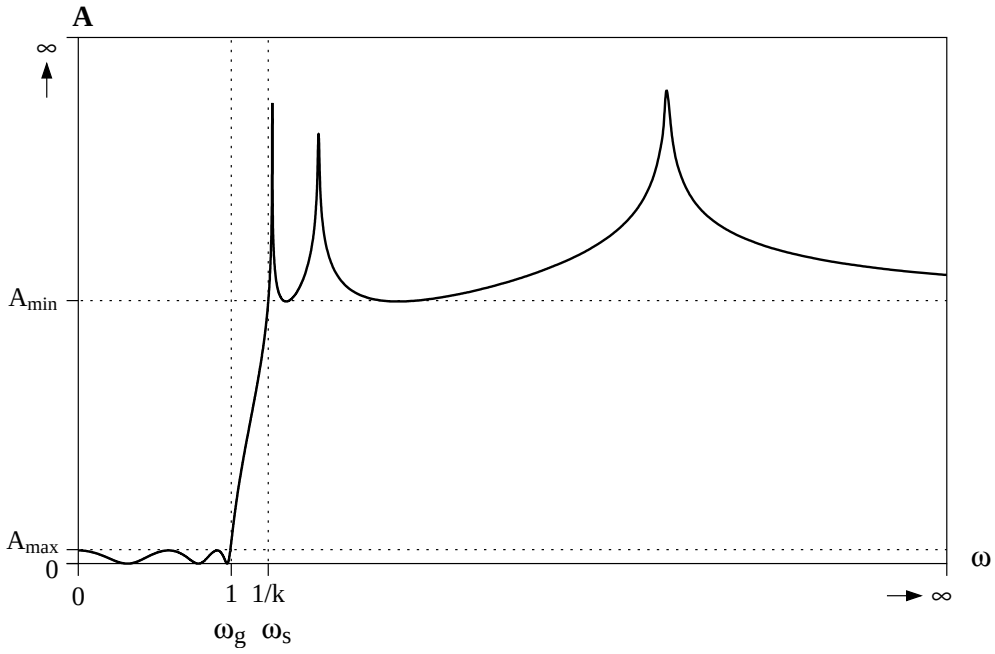
$$\mathrm{C}\left(\tfrac{1}{k\omega}; k\right) = \frac{1}{\lambda \mathrm{C}(\omega; k)} \tag{2.28}$$

2.5.2. Null- und Polstellen

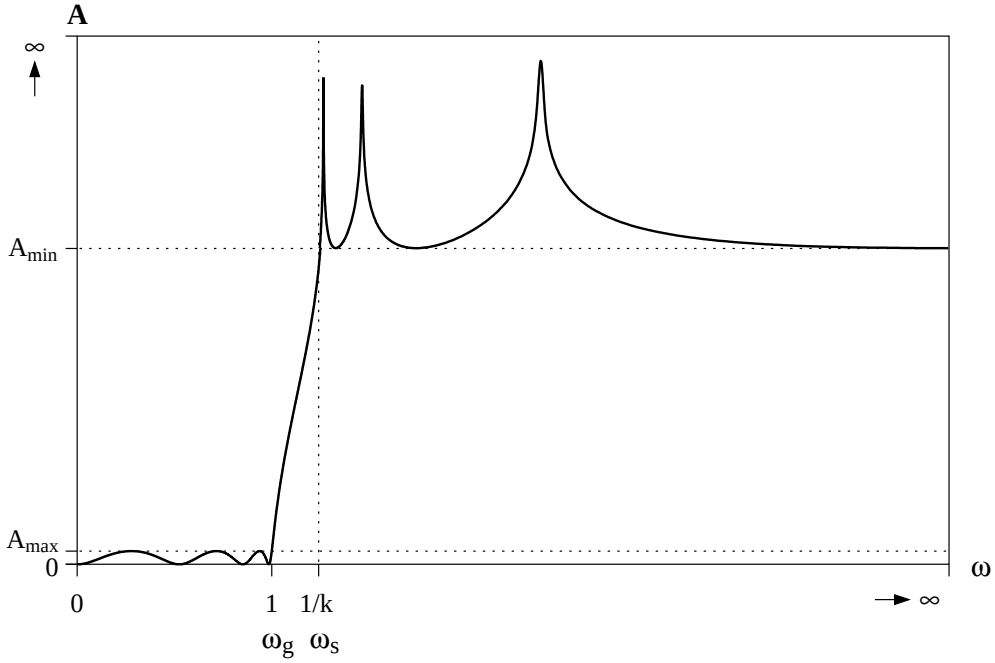
Zunächst sei auf eine Konsequenz von Gleichung 2.28 im Hinblick auf die Pol- und Nullstellen der Drosselung[24] eingegangen. Sie führt sofort zu der Schlußfolgerung, daß diese nicht unabhängig voneinander sind. Setzt man in die Beziehung nämlich beispielhaft eine Nullstelle $\omega_{\circ\nu}^{(D)}$ von $\mathrm{C}(\omega; k)$ ein, dann gilt:

$$\frac{1}{\lambda \mathrm{C}(\omega_{\circ\nu}^{(D)}; k)} \Rightarrow \infty\,.$$

[23] In der Literatur findet man meist die Form $\omega_{\circ\nu} \cdot \omega_{\times\mu} = 1$, welche aber andere Approximationsintervalle voraussetzt.
[24] Nicht aber der von $H(s)$, weshalb sie mit hochgestelltem (D) gekennzeichnet werden.



(a) Grad gerade ($n = 6$)



(b) Grad ungerade ($n = 7$)

Abbildung 2.7.: Dämpfungsverlauf des CAUER-Tiefpaß

Folglich muß die linke Seite in Gleichung 2.28 an der Stelle $1/k\omega_{\circ\nu}^{(D)}$ einen Pol $\omega_{\times\mu}^{(D)}$ besitzen. Der Zusammenhang zwischen den Null- und Polstellen der Dämpfung ist demzufolge durch folgende Beziehung charakterisiert:

$$\omega_{\circ\nu}^{(D)}\,\omega_{\times\mu}^{(D)} = \frac{1}{k}\,. \tag{2.29}$$

2.6. Bessel-Tiefpaß

Der Bessel- bzw. Thomson-Tiefpaß ist vom Syntheseansatz her kein System mit dem Ziel der Selektion von Frequenzanteilen (wie die vorangegangen Filter), sondern eher als verzerrungsarmes Übertragungssystem zu verstehen. Approximiert wird dabei die Übertragungsfunktion $H(s)$ eines idealen LTI-Systems bzw. dessen linearen Phasengang [Tho49, Sto51].

$$\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(s) = \mathrm{e}^{-st_0} \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

Die Verzögerungszeit t_0 ignorierend konzentrieren wir uns zuerst auf die Darstellungsmöglichkeiten der Exponentialfunktion e^x durch Hyperbelfunktionen

$$\mathrm{e}^x = \sinh x + \cosh x$$

und deren Reihenentwicklungen.

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots}$$

Bricht man die Reihen für $\sinh x$ und $\cosh x$ nun einfach nach einer beschränkten Anzahl von Gliedern ab, dann

- wird wahrscheinlich das Konvergenzverhalten, insbesondere für Werte $x > 1$, unbefriedigend
- und die Näherung für e^x unter Umständen kein Hurwitz-Polynom[25] (als Bedingung für stabile Systeme) sein.

Besser ist an dieser Stelle eine Kettenbruchentwicklung – mit den vorteilhaften Eigenschaften:

- daß der wahre Wert mit wachsender Anzahl von Gliedern (abwechselnd von oben und unten) immer genauer genähert wird
- und (wie noch zu sehen sein wird) der Kettenbruch eine zulässige Systemfunktion repräsentiert.

[25] Ein Polynom, dessen Wurzeln allesamt einen negativen Realteil besitzen.

Durch eigene Rechnung oder Verwendung eines geeigneten Nachschlagewerks erhält man aus der Reihenentwicklung den folgenden Kettenbruch des hyperbolischen Cotangens:

$$\coth x = \frac{1}{x} + \cfrac{1}{\frac{3}{x} + \cfrac{1}{\frac{5}{x} + \cfrac{1}{\frac{7}{x} + \cdots}}} \,. \tag{2.30}$$

Bricht man diese Entwicklung nach n Schritten ab, so kann man daraus eine rationalen Bruch $\coth x \approx P_n/Q_n$ bestimmen. Durch vollständige Induktion[26] kann verifiziert werden, daß Zähler und Nenner den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} P_n &= (2n-1)P_{n-1} + x^2 P_{n-2} & P_0 &= 1 & P_{-1} &= 0 \\ Q_n &= (2n-1)Q_{n-1} + x^2 Q_{n-2} & Q_0 &= 0 & Q_{-1} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

gehorchen. Berücksichtigt man die Anfangswerte P_0, Q_0, P_{-1} und Q_{-1}, dann lassen die Formeln sofort erkennen, daß das Zählerpolynom P_n nur gerade Potenzen von x enthält, das Nennerpolynom Q_n dagegen alle Ungeraden.

Kommen wir nun zurück zur Approximation von e^x und interpretieren P_n und Q_n als Näherung für Zähler und Nenner in

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \approx \frac{P_n}{Q_n}$$

und in Konsequenz als Summenterme in der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^x = \cosh x + \sinh x \approx P_n + Q_n = (2n-1)\,(P_{n-1} + Q_{n-1}) + x^2\,(P_{n-2} + Q_{n-2}) \,.$$

Die Summe (und gleichzeitig Berechnungsvorschrift auf der rechten Seite) nennt man Bessel-Polynom vom Grad n.

[26] Gleichfalls zum Ziel führt die Anwendung der allgemeinen Formeln für Kettenbrüche.

$$\mathrm{B}_n(x) = (2n-1)\,\mathrm{B}_{n-1}(x) + x^2\mathrm{B}_{n-2}(x), \qquad \mathrm{B}_0(x) = 1, \qquad \mathrm{B}_{-1}(x) = \frac{1}{x} \tag{2.31}$$

Die ersten Bessel-Polynome sind demzufolge

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_1(x) &= x+1 \\
\mathrm{B}_2(x) &= x^2+3x+3 \\
\mathrm{B}_3(x) &= x^3+6x^2+15x+15 \\
\mathrm{B}_4(x) &= x^4+10x^3+45x^2+105x+105\,.
\end{aligned}$$

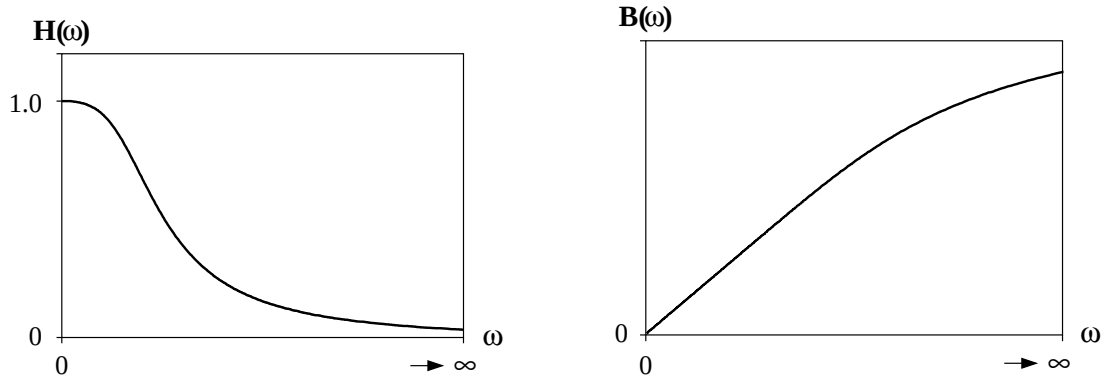
Mit der so gewonnen Näherung für e^x kann man als Übertragungsfunktion des verzerrungsarmen Systems

$$H(s) = \frac{b_0}{\mathrm{B}_n(s)} = \frac{b_0}{b_n s^n + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \tag{2.32}$$

angeben, wobei b_0 nur zum Zwecke der Normierung auf $H(0) = 1$ hinzugefügt wurde. Da in der Kettenbruchentwicklung des Quotienten P_n/Q_n nach Formel 2.30 alle linksseitigen Summanden $(2n-1)/s$ positive Koeffizienten $(2n-1)$ haben, handelt es sich bei $\mathrm{B}_n(s)$ wirklich um ein Hurwitz-Polynom[27] [Cau54, VIII-15b], [Fri79b, 3.1.3], [Che95, 44.5].

Einen typischen Frequenzgang nach Gleichung 2.32 zeigt Abbildung 2.8. Recht gut zu erkennen ist dabei der relativ lineare Phasengang, welcher sich im Nullpunkt als maximal flache Gruppen- bzw. Signallaufzeit präsentiert.

[27] Ein maximal flacher Phasengang läßt sich auch bei Hinzunahme von Nullstellen erzielen, wenn man in $H(s) = \mathrm{e}^{-ms}/\mathrm{e}^{-(m-1)s}$ Zähler und Nenner (getrennt) durch Bessel-Polynome approximiert [Bud65].



(a) Amplitudengang (b) Phasengang

Abbildung 2.8.: Typischer Frequenzgang eines BESSEL-Filters ($n = 4$)

3. Frequenztransformationen

3.1. Einleitung

Aus den Tiefpaßapproximationen kann man durch Transformation der logarithmischen Frequenzachse relativ leicht Filtertypen wie Hochpaß, Bandpaß oder Bandsperre gewinnen [Pap56], [Zve67, 5.4 ff.], [Fri79a, 4], [Che95, 66.1]. Geht man bei $H(s)$ von einer rationalen Funktion in s aus, dann sind die folgenden Substitutionen naheliegend[1]:

Tabelle 3.1.: Frequenztransformationen

Zieltyp	$s :=$	$\mathrm{j}\omega :=$	$\omega :=$
Tiefpaß	$\frac{s}{\omega_0}$	$\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}$	$\frac{\omega}{\omega_0}$
Hochpaß	$\frac{\omega_0}{s}$	$\frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega}$	$-\frac{\omega_0}{\omega}$
Bandpaß	$Q\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)$	$\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$	$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$
Bandsperre	$\frac{1}{Q\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{\omega_0}{s}\right)}$	$\frac{\mathrm{j}}{Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	$\frac{1}{Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$

Die Größe ω_0 dient vor allem dem Zweck, eine geeignete Transformation der Grenzfrequenz(en) zu erreichen. Man kann sie sich entweder als physikalische Frequenz oder einheitenlosen Skalierungsfaktor vorstellen, je nachdem ob s bei der Tiefpaßapproximation als normiert oder entnormiert angenommen wird.

Abbildung 3.1 stellt die Frequenztransformationen, insbesondere was die Eckfrequenzen $\omega = 0, 1, \infty$ angeht, im logarithmischen Amplitudengang dar[2].

[1] Die Transformation in einen Tiefpaß dient nur der Skalierung bzw. Verschiebung der Grenzfrequenz.

[2] Wobei positive und negative Kreisfrequenzen ω nicht streng unterschieden wurden (da der Amplitudengang eine gerade Funktion ist).

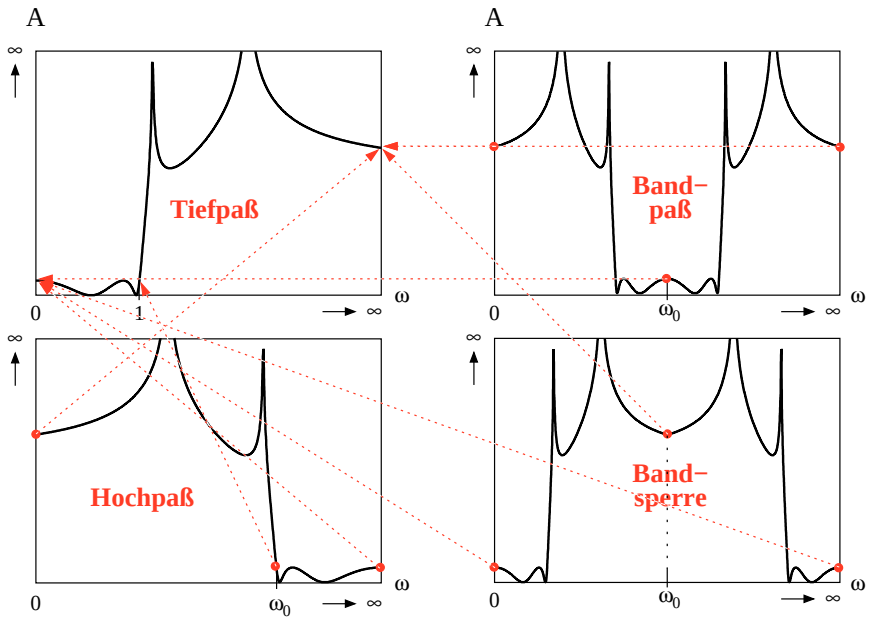


Abbildung 3.1.: Frequenztransformationen

3.2. Hochpaß

3.2.1. Übertragungsfunktion

Die spezielle konforme Abbildung $s := \omega_0/s$ nach Tabelle 3.1 (Inversion[3]) entspricht im Amplitudengang einer Spiegelung um die Frequenz ω_0, wenn man von einer logarithmischen Frequenzachse ausgeht (siehe auch Abbildung 3.2).

Da bei den Standardapproximationen die normierte Grenzfrequenz üblicherweise zu $\omega_g = 1$ gewählt wird, kann man $\omega_0 = 1$ setzen und für die Übertragungsfunktion in der $\mathcal{L}$-Ebene schreiben:

$$H_{\mathrm{HP}}(s) = \frac{a_m\left(\frac{1}{s}\right)^m + \cdots + a_2\left(\frac{1}{s}\right)^2 + a_1\left(\frac{1}{s}\right) + a_0}{b_n\left(\frac{1}{s}\right)^n + \cdots + b_2\left(\frac{1}{s}\right)^2 + b_1\left(\frac{1}{s}\right) + b_0}\,.$$

Multipliziert man noch den Nenner mit s^n und den Zähler mit s^m, so führt dies zu einer Umordnung der Koeffizienten.

[3] Ein Spezialfall der Möbius-Transformation $\frac{az+b}{cz+d}$, welche zu den konformen Abbildungen gehört.

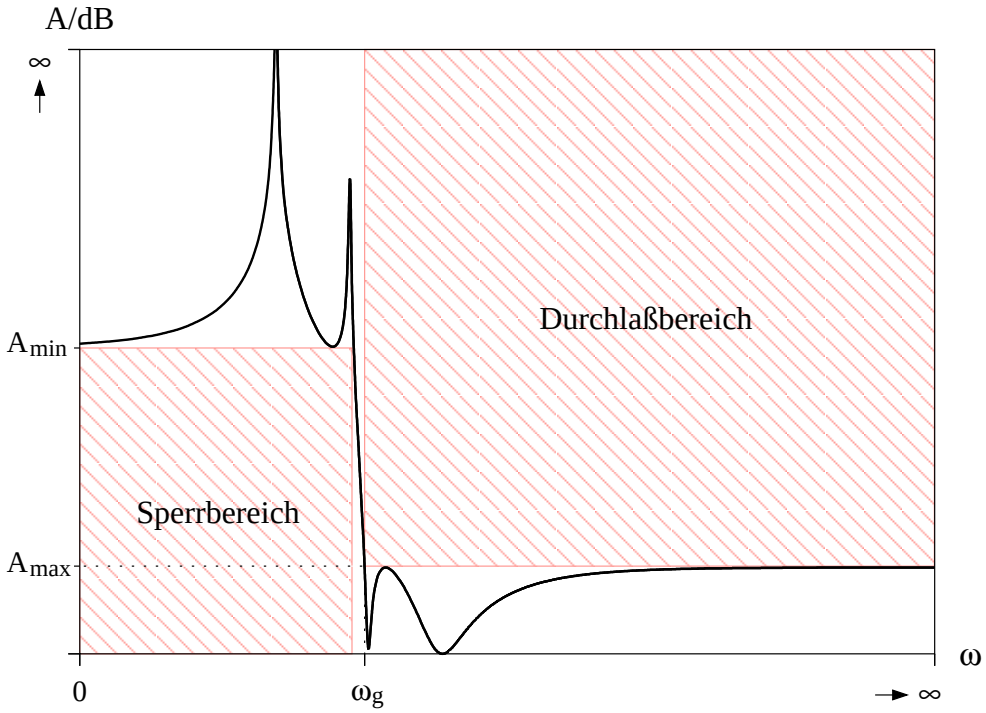


Abbildung 3.2.: Hochpaß-Toleranzschema (logarithmisch, $\omega_0 = \omega_g$)

$$H_{\mathrm{HP}}(s) = s^{n-m} \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n} \tag{3.1}$$

3.2.2. Pole und Nullstellen

Die Wirkung der Transformation auf die rationale Übertragungsfunktion nach Formel 3.1 korrespondiert mit einer bestimmten Verschiebung der Pol- und Nullstellen in der komplexen Ebene. Sehen wir uns dazu die Übertragungsfunktion $H(s)$ eines Tiefpaß' in Linearfaktordarstellung an.

$$H_{\mathrm{LP}}(s) = \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m} (s - s_{\circ\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n} (s - s_{\times\nu})}$$

Einsetzen der Substitution $s := s^{-1}$ läßt daraus

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{HP}}(s) &= \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \left(\frac{1}{s} - \underset{\circ}{s}_{\mu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{s} - \underset{\times}{s}_{\nu}\right)} \\
&= s^{n-m} \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} (1 - s\,\underset{\circ}{s}_{\mu})}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 - s\,\underset{\times}{s}_{\nu})} \\
&= s^{n-m} \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \underset{\circ}{s}_{\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \underset{\times}{s}_{\nu}} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \left(\frac{1}{\underset{\circ}{s}_{\mu}} - s\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\underset{\times}{s}_{\nu}} - s\right)}
\end{aligned}
$$

werden, d. h. :

- Pole und Nullstellen des Tiefpaß' werden invertiert;

$$
\underset{\circ}{s}_{\mathrm{HP}} = \frac{1}{\underset{\circ}{s}_{\mathrm{LP}}}, \qquad \underset{\times}{s}_{\mathrm{HP}} = \frac{1}{\underset{\times}{s}_{\mathrm{LP}}}
$$

- es entsteht eine neue Nullstelle bei $\underset{\circ}{s} = 0$ mit der Vielfachheit $n - m$;
- als Vorfaktor wirkt nun das (komplexe) Produkt aller Pole bzw. Nullstellen:

$$
(-1)^{n-m} \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \underset{\circ}{s}_{\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \underset{\times}{s}_{\nu}} \,.
$$

3.3. Bandpaß

3.3.1. Übertragungsfunktion

Ein Bandpaßsystem hat typischerweise einen Durchlaßbereich, welcher sich von ω_{g_1} bis ω_{g_2} erstreckt (siehe Abbildung 3.3).

Aus dem Tiefpaß-Amplitudengang läßt sich eine solche Charakteristik ableiten, wenn man die Transformationsbeziehung (nach Tabelle 3.1)

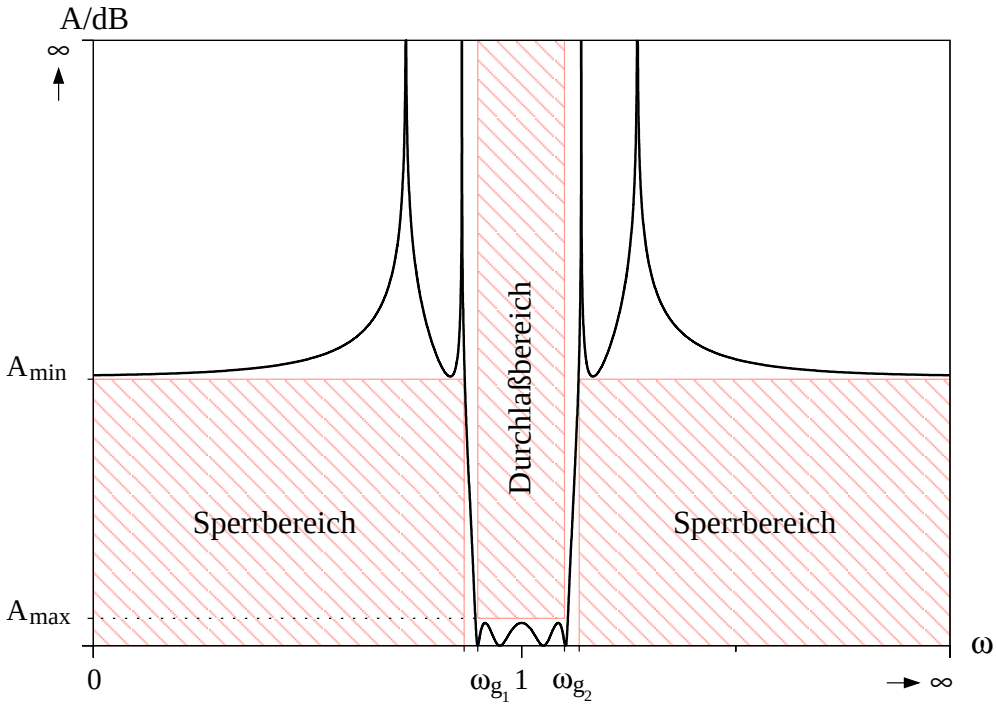


Abbildung 3.3.: Bandpaß-Toleranzschema (logarithmisch, $\omega_0 = 1$)

$$\omega_{\mathrm{LP}} = Q\left(\frac{\omega_{\mathrm{BP}}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\mathrm{BP}}}\right), \tag{3.2}$$

anwendet. Die Kreisfrequenz ω_0 nimmt in diesem Fall die Bedeutung einer Mittenfrequenz an, Q bezeichnet man als Güte. Die Interpretation von ω_0 wird einsichtig, wenn man Gleichung 3.2 folgendermaßen umformt (vgl. auch [Pap62, 7-1]):

$$\omega_{\mathrm{LP}} = Q\,\frac{\omega_{\mathrm{BP}}^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega_{\mathrm{BP}}} = Q\,\frac{(\omega_{\mathrm{BP}} - \omega_0)(\omega_{\mathrm{BP}} + \omega_0)}{\omega_0\omega_{\mathrm{BP}}}\,.$$

Um auch für die Güte Q eine anschauliche Aussage zu erhalten, wenden wir (nach Vereinfachung für $\omega_0 = 1$) auf

$$\omega_{\mathrm{BP}}^2 - \frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{Q}\omega_{\mathrm{BP}} - 1 = 0$$

die quadratische Lösungsformel (vorerst formal) an:

$$\omega_{\mathrm{BP}_{1,2}} = \frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q}\right)^2 + 1}\,. \tag{3.3}$$

An Hand der mehr anschaulichen Umformung

$$\left(\omega_{\mathrm{BP}} - \frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q}\right)^2 = \left(\frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q} - 1\right)\left(\frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q} - 1\right)$$

wird deutlich, daß Q insbesondere auf die Skalierung der Tiefpaßfrequenz ω_{LP} und in Folge auf die Breite des Durchlaßbereichs wirkt.

Was wir bezüglich Formel 3.3 noch berücksichtigen müssen ist die Tatsache, daß sich Frequenztransformationen sowohl auf positive als auch negative Kreisfrequenzen beziehen. Hinzu kommt, daß wegen

$$\frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q} < \sqrt{\left(\frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q}\right)^2 + 1}$$

eine der beiden Frequenzen ω_{BP} in der gewonnenen Lösungsformel immer negativ wird. Man darf sich nun insofern nicht täuschen lassen, als das die andere zugehörige Frequenz (mit gleichem Vorzeichen) durch Einsetzen von $-\omega_{\mathrm{LP}}$ erzeugt wird. Für den (normierten) Zusammenhang zwischen ω_{LP} und ω_{BP} ergibt sich aus diesem Grund letztlich:

$$\omega_{\mathrm{BP}_{1,2}} = \sqrt{\left(\frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{\omega_{\mathrm{LP}}}{2Q}\,. \tag{3.4}$$

Jede Frequenz des Tiefpasses wird demzufolge auf zwei neue Frequenzen abgebildet, die (arithmetisch) symmetrisch zu dem Wurzelausdruck $\sqrt{1+(\omega_{\mathrm{LP}}/2Q)^2}$ liegen. Für die Abbildung der Grenzfrequenz $\omega_g = 1$ der normierten Approximationsfunktion bedeutet dies:

$$\omega_{g_{1,2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{1}{2Q} = \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \pm \frac{\Delta\omega}{2}$$

und deshalb für die geometrische Mittenfrequenz des Bandpaß'[4]:

[4] Bei logarithmischer Abszisse ω_{BP} liegen die beiden Grenzfrequenzen also (geometrisch, d. h. für $\sqrt{\omega_{g_1}\omega_{g_2}}$) sym-

$$\omega_{g_1}\omega_{g_2} = 1\,. \tag{3.5}$$

Den Sinn, Q als Gütedefinition herzunehmen, unterstreicht folgende Formel für die absolute Bandbreite (bei Mittenfrequenz $\omega_0 = 1$):

$$\Delta\omega = \omega_{g_2} - \omega_{g_1} = \frac{1}{Q}\,. \tag{3.6}$$

3.3.2. Pole und Nullstellen

Was die Transformation der Pol- und Nullstellen angeht, so gilt dafür ebenfalls Formel 3.4. Um eine gewisse Geradlinigkeit zu wahren, wählen wir jedoch den "umständlichen" Weg[5] und substituieren in der Produktdarstellung

$$H_{\mathrm{LP}}(s) = \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(s - \underset{\circ}{s}_\mu)}{\prod_{\nu=1}^{n}(s - \underset{\times}{s}_\nu)}$$

zuerst die $\mathcal{L}$-Variable zu $Q(s + s^{-1})$.

metrisch zu $\omega_0 = 1$. Aus arithmetischer Sicht (d. h. linearer Frequenzachse) ist dem nicht so, denn es gilt: $(\omega_{g_1} + \omega_{g_2})/2 = \sqrt{1 + (2Q)^{-2}} \neq 1$. Allerdings wird für Güten $Q \gg 1/2$, welche aus technischer Sicht den Sinn eines Bandpaß' darstellen, diese Abweichung vernachlässigbar und dadurch $(\omega_{g_1} + \omega_{g_2})/2 \approx 1$.

[5] Da Pole und Nullstellen bei der Transformation nach dem gleichen Schema wie jede andere Frequenz abgebildet werden, kann man sie einfach in die Transformationsbeziehung $s_{\mathrm{LP}} = Q(s_{\mathrm{BP}} + s_{\mathrm{BP}}^{-1})$ einsetzen und gelangt sofort zu: $\underset{\times}{s}_{\mathrm{LP}} = Q(1 + \underset{\times}{s}_{\mathrm{BP}}^2)/\underset{\times}{s}_{\mathrm{BP}}$.

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{BP}}(s) &= \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \left[Q\left(s + \frac{1}{s}\right) - \underset{\circ}{s}_{\mu} \right]}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left[Q\left(s + \frac{1}{s}\right) - \underset{\times}{s}_{\nu} \right]} \\
&= s^{n-m} \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \left[Q(1+s^2) - s\,\underset{\circ}{s}_{\mu} \right]}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left[Q(1+s^2) - s\,\underset{\times}{s}_{\nu} \right]} \\
&= \left(\frac{s}{Q}\right)^{n-m} \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \left(s^2 - \frac{\underset{\circ}{s}_{\mu}}{Q} s + 1 \right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(s^2 - \frac{\underset{\times}{s}_{\nu}}{Q} s + 1 \right)}
\end{aligned}
$$

Aus jedem Linearfaktor der Tiefpaß-Übertragungsfunktion entspringen (wegen des quadratischen Auftretens von s in letzter Gleichung) also zwei neue Wurzeln. Die Evaluation erfolgt durch Nullsetzen eines Faktors (hier beispielhaft an einer Nullstelle) und Anwendung der quadratischen Lösungsformel.

$$
\underset{\circ}{s}_{\mathrm{BP}_{1,2}} = \frac{\underset{\circ}{s}_{\mathrm{LP}}}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\underset{\circ}{s}_{\mathrm{LP}}}{2Q}\right)^2 - 1}, \quad \text{mit} \quad \underset{\circ}{s}_{\mathrm{BP}_1} \underset{\circ}{s}_{\mathrm{BP}_2} = 1
$$

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß:

- jede Nullstelle (und sinngemäß jeder Pol) nach

$$
\begin{aligned}
\underset{\circ}{s}_{\mathrm{BP}_{1,2}} &= \frac{1}{2Q}\left(\underset{\circ}{s}_{\mathrm{LP}} \pm \sqrt{\underset{\circ}{s}_{\mathrm{LP}}^2 - 4Q^2} \right) \\
\underset{\times}{s}_{\mathrm{BP}_{1,2}} &= \frac{1}{2Q}\left(\underset{\times}{s}_{\mathrm{LP}} \pm \sqrt{\underset{\times}{s}_{\mathrm{LP}}^2 - 4Q^2} \right)
\end{aligned}
$$

  wieder zwei neue Nullstellen hervorbringt, wobei reelle Nullstellen nur unter der Bedingung $\underset{\circ}{s}_{\mathrm{LP}} \geq 2Q$ auch wieder reelle erzeugen (ansonsten ein konjugiert-komplexes Nullstellenpaar);

- aus einem Tiefpaß vom Grad n ein Bandpaß vom Grad $2n$ wird (siehe voriger Punkt);

- die Transformation zu einer neuen Nullstelle $s_{\text{BP}} = 0$ mit der Vielfachheit $n - m$ führt;
- als Vorfaktor nun

$$\frac{a_m}{b_n} Q^{-(n-m)}$$

wirkt.

3.4. Bandsperre

Zur Bandsperre bleibt nicht soviel zu sagen – vor allem weil sich diese Frequenztransformation wegen

$$s_{\text{LP}} = \frac{1}{s_{\text{HP}}}, \qquad s_{\text{HP}} = Q\left(s_{\text{BS}} + \frac{1}{s_{\text{BS}}}\right)$$

als Kombination von Bandpaß- und Hochpaß-Transformation erweist (Reihenfolge beliebig, siehe auch anschauliche Darstellung in Abbildung 3.4).

$$s_{\text{LP}} = \frac{1}{Q\left(s_{\text{BS}} + s_{\text{BS}}^{-1}\right)}, \qquad \omega_{\text{LP}} = \frac{1}{Q\left(\omega_{\text{BS}}^{-1} - \omega_{\text{BS}}\right)}$$

Vergleicht man die Substitutionsvorschrift für ω_{LP} mit der für die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (nach 3.2), so stellt man als Äquivalenz $\omega_{\text{LP}} := \omega_{\text{LP}}^{-1}$ fest. Inversion der Tiefpaßfrequenz ω_{LP} in Formel 3.4 ergibt aus diesem Grunde für die Bandsperre:

$$\omega_{\text{BS}_{1,2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q\omega_{\text{LP}}}\right)^2} \pm \frac{1}{2Q\omega_{\text{LP}}} \,. \tag{3.7}$$

Für die aus der Tiefpaß-Frequenz $\omega_{\text{LP}} = 1$ hervorgegangenen Grenzfrequenzen gilt deshalb:

$$\omega_{g_{1,2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{1}{2Q}, \qquad \Delta\omega = \frac{1}{Q}$$

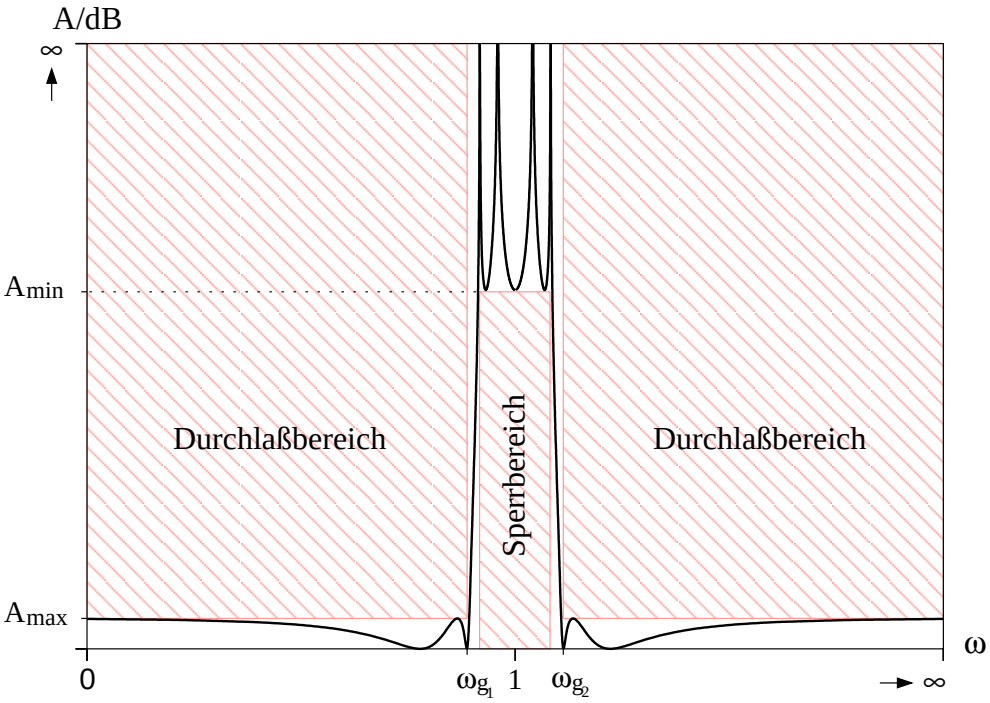


Abbildung 3.4.: Bandsperre-Toleranzschema (logarithmisch, $\omega_0 = 1$)

A. Algebraische Funktionen

A.1. Algebraische Funktionen

Algebraische Funktionen verknüpfen ein Argument x mit einem Funktionswert y so, daß sie einer algebraischen Gleichung der Form $g(x,y) = 0$ genügen. $g(x,y)$ enthält dabei Verknüpfungen von x und y, die nur Grundrechenarten (algebraisch) sind, also

$$g(x,y) = p_m(x)y^m + p_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x), \tag{A.1}$$

wobei $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}, p_m$ algebraische Polynome in x sind. Für $g(x,y) = 0$ kann in einfachen Spezialfällen (z. B. $m = 1$) eine explizite Lösungsformel $y = f(x)$ gegeben werden, die entweder

- ein Polynom (ganzrationale Funktion),
- eine gebrochen rationale Funktion
- oder eine irrationale Funktion ist.

Die beiden ersten Fälle werden deshalb rational genannt, weil ein Ergebnis nach Anwendung endlich vieler (rationaler) Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) zur Verfügung steht.

A.2. Ganzrationale Funktionen (Polynome)

A.2.1. Definition

Polynome sind ganzrationale Funktionen der Form

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad a_n \neq 0 \tag{A.2}$$

mit (hier reellen) Koeffizienten a_i. Sie werden als normiert bezeichnet, wenn der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist. Eine nachträgliche Normierung ist durch Einführung eines Vorfaktors $C = a_n$ immer möglich.

$$p(x) = C \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_n} x^i = K \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = K \left(x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right)$$

Die letzte Form ist vor allem dann von Bedeutung, wenn die Linearfaktordarstellung mit Hilfe der n Nullstellen $\mathring{x}_i$ Anwendung finden soll (Hauptsatz der Algebra).

$$p(x) = a_n(x-\mathring{x}_1)(x-\mathring{x}_2)\cdots(x-\mathring{x}_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\mathring{x}_i) \tag{A.3}$$

A.2.2. Erste Ableitung

Die Ableitung eines Polynoms in Summendarstellung, also aus den Koeffizienten, ist trivial und lautet

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i\,a_i x^{i-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k\,.$$

Interessant ist jedoch die Gewinnung der ersten Ableitung von $p(x)$ aus den Nullstellen $\mathring{x}_i$. Dazu geht man von Formel A.3 aus und verwendet (wegen der störenden Produkte) logarithmische Differentiation in Verbindung mit der Regel $[\ln x]' = x^{-1}$.

$$\begin{aligned}
p'(x) &= p(x)\frac{p'(x)}{p(x)} = p(x)\,[\ln p(x)]' \\
&= p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left[a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\mathring{x}_i)\right] \\
&= p(x)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x-\mathring{x}_i)\right] \\
p'(x) &= p(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\mathring{x}_i} \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis[1] gibt uns die Möglichkeit die Ableitung eines Polynoms an Stelle $x \neq \mathring{x}_i$ mittels der Nullstellen zu bestimmen. Für die Berechnung der Ableitung an einer der Nullstellen $\mathring{x}_k$ selbst, scheint letzte Formel wegen $\lim_{x\to\mathring{x}_k} p(x)/(x-\mathring{x}_k) \to 0/0$ zuerst ungeeignet. Schreibt man die ganze Formel aber ausführlich und setzt $x = \mathring{x}_k$, also

[1] Das Ergebnis spiegelt an sich nur die Produktregel der Differentiation für n Faktoren (von Formel A.3) wieder.

$$p'(\mathring{x}_k) = \frac{p(\mathring{x}_k)}{\mathring{x}_k - \mathring{x}_1} + \frac{p(\mathring{x}_k)}{\mathring{x}_k - \mathring{x}_2} + \cdots + \underbrace{\lim_{x \to \mathring{x}_k} \frac{p(x)}{x - \mathring{x}_i}}_{i=k} + \cdots + \frac{p(\mathring{x}_k)}{\mathring{x}_k - \mathring{x}_{n-1}} + \frac{p(\mathring{x}_k)}{\mathring{x}_k - \mathring{x}_n}$$

dann ist zu erkennen, daß

1. wegen $p(\mathring{x}_k) = 0$ alle Summanden mit $i \neq k$ verschwinden und
2. für $i = k$ der Faktor $x - \mathring{x}_i$ bzw. $x - \mathring{x}_k$, welcher in Zähler und Nenner vorhanden ist, gekürzt werden kann.

Die Ableitung an der Nullstelle $\mathring{x}_k$ nimmt deshalb folgende einfache Form an:

$$p'(\mathring{x}_k) = a_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\mathring{x}_k - \mathring{x}_i) \,.$$

A.2.3. Nullstellen

Bei der Linearfaktordarstellung nach Formel A.3 handelt es sich prinzipiell um den von C. F. Gauss in seiner Dissertation 1799 erstmals bewiesenen Hauptsatz der Algebra:

> Jedes algebraische Polynom n-ten Grades hat genau n komplexe Lösungen [Gau13].

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten a_i müssen diese Nullstellen entweder konjugiert komplex (als Spezialfall imaginär) auftreten oder aber reell sein. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, dann würde Ausmultiplizieren der Produktdarstellung A.3 (zur Gewinnung der Summenformel A.2) nicht zu reellen Koeffizienten a_i führen.

Nullstellen eines Polynoms müssen nicht notwendigerweise alle verschieden sein, oftmals sind "mehrfache" Nullstellen vorhanden. Dieser Umstand spiegelt sich dann in der Darstellungsmöglichkeit als Linearfaktor der Form $(x - \mathring{x}_k)^m$ wieder, in der m die Vielfachheit (Ordnung) der Nullstelle angibt. Die allgemeine Definition der Vielfachheit einer Nullstelle $\mathring{x}_k$ hat aber etwas mit den Ableitungen von $p(x)$ an dieser Stelle zu tun. Um diesen Zusammenhang herzustellen gehen wir davon aus, daß $p(x)$ in der Form

$$p(x) = (x - \mathring{x})^m q_0(x)$$

vorliegt. Das Polynom $q_0(x)$ sei normiert und vom Grad $n - m$ mit den Nullstellen $\mathring{x}_i \neq \mathring{x}$, $i = 1, \ldots, n - m$ (ansonsten wäre m zu erhöhen). Die Ableitung von $p(x)$ ist nach der Produktregel

$$\begin{aligned} p'(x) &= m(x-\mathring{x})^{m-1}q_0(x) + (x-\mathring{x})^m q_0{}'(x) \\ &= (x-\mathring{x})^{m-1}\left[m\,q_0(x) + (x-\mathring{x})q_0{}'(x)\right] \end{aligned}$$

Der rechte Faktor hat aber $\mathring{x}$ nicht als Nullstelle und kann deshalb mit $q_1(x)$ abgekürzt werden. Die höheren Ableitungen ergeben sich so rekursiv zu

$$\begin{aligned} p'(x) &= (x-\mathring{x})^{m-1}q_1(x) \\ p''(x) &= (x-\mathring{x})^{m-2}q_2(x) \\ &\vdots \\ p^{(m-1)}(x) &= (x-\mathring{x})q_{m-1}(x) \\ p^{(m)}(x) &= q_m(x) \neq 0 \end{aligned}$$

d. h. alle Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ verschwinden an der Nullstelle $\mathring{x}$, die m-te jedoch nicht. Diese Aussage stellt eine Verallgemeinerung des Begriffes der Vielfachheit einer Nullstelle dar[2].

Auch ohne genaue Kenntnis der Nullstellen eines Polynoms kann man ausgehend von den Koeffizienten in Summenformel A.2 Aussagen zu deren Lage machen. Hier sei nur der Lokalisierungssatz von Cauchy erwähnt, weitere findet man z. B. in [Kai80, 6.2.2.].

> Ist A der Maximalwert der Beträge aller Koeffizienten a_i mit $i = 0,\ldots,n-1$, also $A = \max(|a_0|, |a_1|, |a_2| \ldots |a_{n-1}|)$, dann sind die Beträge sämtlicher Nullstellen kleiner als

$$1 + \frac{A}{|a_n|}\,.$$

An einer Nullstelle gilt bekanntermaßen $p(x) = 0$ und somit

$$-a_n\mathring{x}^n = a_{n-1}\mathring{x}^{n-1} + \cdots + a_2\mathring{x}^2 + a_1\mathring{x} + a_0 = r(x)\,.$$

[2] Außerdem wird eine Funktion mit solchen Eigenschaften als maximal flach an dieser Stelle (hier $x = \mathring{x}$) bezeichnet.

Wir bilden nun auf beiden Seiten den Betrag

$$\left|a_n \underset{\circ}{x}^n\right| = \left|r(\underset{\circ}{x})\right|$$

und betrachten den Wert von $\left|r(\underset{\circ}{x})\right|$. Er ist sicherlich dann am größten, wenn alle Koeffizienten positiv und nahezu dem Wert A entsprechen. Aus diesem Grund gilt die Ungleichung

$$\left|a_{n-1}\underset{\circ}{x}^{n-1} + \cdots + a_2\underset{\circ}{x}^2 + a_1\underset{\circ}{x} + a_0\right| \leq A\left|\underset{\circ}{x}^{n-1}\right| + \cdots + \left|\underset{\circ}{x}^2\right| + \left|\underset{\circ}{x}\right| + 1$$

und gleichbedeutend

$$\begin{aligned}\left|r(\underset{\circ}{x})\right| &\leq A\left(\left|\underset{\circ}{x}^{n-1}\right| + \ldots + \left|\underset{\circ}{x}^2\right| + \left|\underset{\circ}{x}\right| + 1\right)\\ \left|a_n\underset{\circ}{x}^n\right| &\leq A\left(\left|\underset{\circ}{x}\right|^{n-1} + \ldots + \left|\underset{\circ}{x}\right|^2 + \left|\underset{\circ}{x}\right| + 1\right)\,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite kann man auch als Quotient zweier Polynome darstellen, d. h.

$$\left|a_n\underset{\circ}{x}^n\right| \leq A\frac{\left|\underset{\circ}{x}\right|^n - 1}{\left|\underset{\circ}{x}\right| - 1}\,.$$

Ausklammern von $\left|\underset{\circ}{x}\right|^n$ führt zu

$$|a_n| \leq A\frac{1 - \left|\underset{\circ}{x}\right|^{-n}}{\left|\underset{\circ}{x}\right| - 1} \overset{|\underset{\circ}{x}|>1}{\leq} A\frac{1}{\left|\underset{\circ}{x}\right| - 1}$$

und damit zu Cauchy's oberer Grenze für den Betrag der Nullstellen.

$$\left|\underset{\circ}{x}\right| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}$$

A.3. Gebrochen rationale Funktionen

A.3.1. Definition

Dieser Typ der algebraischen Funktionen ist als Quotient zweier Polynome erklärbar, wobei das Nennerpolynom nicht konstant sein darf[3].

$$r(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}$$

Die verschiedenen Darstellungsformen der ganzrationalen Funktionen aus Abschnitt A.2 lassen sich hierbei auf Nenner- und Zähler anwenden, was zu weiteren Darstellungsmöglichkeiten führt[4].

A.3.2. Asymptotisches Verhalten

Abhängig von der Differenz zwischen dem Grad von Nenner- und Zählerpolynom lassen sich drei Fälle in Bezug auf das asymptotischen Verhalten von $r(x)$ unterscheiden:

1. Für $n > m$ handelt es sich bei $r(x)$ um eine echt gebrochen rationale Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$. Solche Funktionen können mit Hilfe ihrer n Pole und deren jeweiliger Vielfachheit m_i in einen Partialbruch wiefolgt entwickelt werden:

$$r(x) = \sum_i \frac{c_i}{(x - x_i)^{m_i}} \ .$$

2. Im Fall $m > n$ gilt: $\lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$ und man spricht von einem $m - n$ fachen Pol im Unendlichen.

3. Sollte jedoch $n = m$ gelten, dann nähert sich $r(x)$ im Unendlichen dem Wert a_n/b_n. Eine Partialbruchzerlegung ist in diesem Fall ebenfalls möglich, allerdings muß vorher die Konstante a_n/b_n abgespalten werden.

[3] Sonst würde es sich um eine ganzrationale Funktion handeln.

[4] Den Spezialfall $r(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ bezeichnet man als gebrochen-lineare Funktion, im Komplexen auch als Möbius-Transformation.

$$r(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u_1(x)}{v(x)} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{u_1(x) + \frac{a_n}{b_n} v(x)}{v(x)}$$

Dadurch erhält man ein Zählerpolynom $u_1(x)$ vom Grad $n-1$, dessen höchstwertiger Koeffizient also verschwindet.

$$u_1(x) = u(x) - \frac{a_n}{b_n} v(x)$$

A.3.3. Erste Ableitung

Die erste Ableitung kann ganz allgemein mit Hilfe der Quotientenregel

$$r'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \tag{A.5}$$

gefolgt von Einsetzen der Ableitungsformeln für Polynome, ermittelt werden.

Unter anderem kann man auch wieder (ausgehend von Nullstellen und Polen) den Weg der logarithmischen Differentiation beschreiten. Dazu sei von den Polynomen $u(x)$ und $v(x)$ und deren Linearfaktorzerlegung ausgegangen.

$$u(x) = a_m \prod_{i=1}^{m} (x - \underset{\circ}{x}_i) \qquad\qquad v(x) = b_n \prod_{l=1}^{n} (x - \underset{\times}{x}_l)$$

Einsetzen der Ableitungsformel A.4 für Polynome in die Quotientenregel A.5, sowie nachfolgendes Kürzen von $v(x)$, führt zu

$$r'(x) = r(x) \left(a_m \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x - \underset{\circ}{x}_i} - b_n \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{x - \underset{\times}{x}_l} \right).$$

B. TSCHEBYSCHEFF-Funktionen

B.1. Einleitung

Dieser Typ von Funktionen wurde insbesondere durch P. L. TSCHEBYSCHEFF im Zusammenhang mit Approximationsproblemen untersucht [Tsc07, Ach67, Mei64, Kör88]. Eine verständliche Einführung in diese Funktionen[1] enthalten z. B. [HH92, Kai80] sowie [SS88], übersichtliche Zusammenfassungen der Beziehungen untereinander bzw. zu anderen speziellen Funktionen enthält [AS72], numerische Aspekte werden in [PTVF92] behandelt.

B.2. TSCHEBYSCHEFF-Funktionen erster Art

B.2.1. Definition

B.2.1.1. Analytische Darstellung

Die TSCHEBYSCHEFF'sche Funktion erster Art $\mathrm{T}_n(x)$ ist definiert als

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)\,. \tag{B.1}$$

Wegen $\cos(\mathrm{j}\varphi) = \cosh\varphi$ geht T_n für $|x| > 1$ in

$$\mathrm{T}_n(x) = \cosh(n \operatorname{arcosh} x)$$

über.

B.2.1.2. Parameterdarstellung

Nimmt man die Substitutionen

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n\varphi), \qquad x = \cos\varphi, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \leq 1 \tag{B.2}$$

in Ausgangsgleichung B.1 vor, dann erhält man für $\mathrm{T}_n(x)$ eine Parameterdarstellung durch transzendente Funktionen. Wenn φ von $-\pi/2$ nach $+\pi/2$ läuft, dann bewegt sich x von -1 nach $+1$

[1] Meist sehr stark konzentriert auf die TSCHEBYSCHEFF-Funktionen erster Art.

und y alterniert im gleichen Intervall. Andere Werte für x, die außerhalb des Intervalls $[-1,+1]$ liegen, erhält man, wenn der Parameter φ imaginär wird. Für diesen Fall gilt[2]

$$\mathrm{T}_n(x) = \cosh(n|\varphi|), \qquad x = \cosh|\varphi|, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad |x| > 1 \tag{B.3}$$

B.2.1.3. Rekursive (algebraische) Darstellung

Die Tschebyscheff'schen Funktionen haben eine ganz bemerkenswerte Eigenschaft – sie sind (rekursiv) als algebraische Polynome in x darstellbar[3].

$$\mathrm{T}_n(x) = 2x\,\mathrm{T}_{n-1}(x) - \mathrm{T}_{n-2}(x) \tag{B.4}$$

Die Rekursionsformel kann ausgehend von der Ordnung $n-1$ und unter Zuhilfenahme des Additionstheoremes $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(x) &= \cos\left[(n+1)\varphi\right] \\
&= \cos(n\varphi+\varphi) \\
&= \cos(n\varphi)\cos\varphi - \sin(n\varphi)\sin\varphi \\
&= x\,\mathrm{T}_n(x) - \sin(n\varphi)\sin\varphi
\end{aligned}$$

Mit der trigonometrischen Multiplikationsformel $\sin\alpha\sin\beta = \left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]/2$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(x) &= x\,\mathrm{T}_n(x) - \sin(n\varphi)\sin\varphi \\
2\,\mathrm{T}_{n+1}(x) &= 2x\,\mathrm{T}_n(x) - \cos\left[(n-1)\varphi\right] + \cos\left[(n+1)\varphi\right] \\
2\,\mathrm{T}_{n+1}(x) &= 2x\,\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x) + \mathrm{T}_{n+1}(x) \\
\mathrm{T}_{n+1}(x) &= 2x\,\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

[2] Denn für imaginäres Argument geht der Cosinus ja bekanntlich in die entsprechende Hyperbelfunktion über, d. h. $\cos(\mathrm{j}\,|\varphi|) = \cosh|\varphi|$.

[3] Aus diesem Grund wird häufig auch der Begriff der Tschebyscheff-Polynome verwendet.

was nach Umindizierung Gleichung B.4 beweist.

Die Anfangswerte für $n = 0, 1$ ergeben sich direkt aus Definitionsgleichung B.1.

$$\mathrm{T}_0(x) = 1, \qquad \mathrm{T}_1(x) = x$$

Exemplarisch sind hier noch die nächsten Polynome aufgeführt[4].

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
\mathrm{T}_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
\mathrm{T}_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
\mathrm{T}_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

Aus Rekursionsformel B.4 ist außerdem erkennbar, daß das Polynom $\mathrm{T}_n(x)$ den Grad n besitzt.

B.2.1.4. Irrationale Darstellung

Eine weitere Form der TSCHEBYSCHEFF'schen Funktion $\mathrm{T}_n(x)$ kann man aus der Parameterbeziehung B.2 erhalten, wenn man die EULER'schen Formeln der trigonometrischen Funktionen anwendet.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(x) = \cos\varphi &= \frac{e^{\mathrm{j}n\varphi} + e^{-\mathrm{j}n\varphi}}{2} \\
&= \frac{(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi)^n}{2} \\
&= \frac{(\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^n + (\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^n}{2}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} \,. \tag{B.5}$$

[4] Weitere Polynome bis $n = 12$ kann man z. B. in [AS72, Tab. 22.3] finden.

Aus Formel B.5 kann auch der Leitkoeffizient, also der Koeffizient vor x^n, bestimmt werden[5]. Dazu geht man von der allgemeinen Formel für ein algebraisches Polynom aus

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

und bildet einen Grenzwert wiefolgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{T}_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to\infty} a_k x^{k-n} \\
&= a_n \,.
\end{aligned}$$

Umstellen und Zuhilfenahme der irrationalen Darstellung B.5 liefert den Wert des Koeffizienten a_n.

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{T}_n(x)}{x^n} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2x^n} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} (1+\sqrt{1-x^{-1}})^n + \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} (1-\sqrt{1-x^{-1}})^n \\
a_n &= 2^{n-1}
\end{aligned}$$

B.2.2. Spezielle Werte

Die folgenden Werte ergeben sich direkt aus Definitionsgleichung B.1.

[5] Der Wert des Leitkoeffizienten ist auch direkt aus der rekursiven Darstellung B.4 zu entnehmen.

$$\mathrm{T}_n(-1) = \begin{cases} +1 & (n = 0,2,4,\ldots) \\ -1 & (n = 1,3,5,\ldots) \end{cases}$$

$$\mathrm{T}_n(0) = \begin{cases} +1 & (n = 0,4,8,\ldots) \\ -1 & (n = 2,6,10,\ldots) \\ 0 & (n = 1,3,5,\ldots) \end{cases}$$

$$\mathrm{T}_n(1) = 1$$

B.2.3. Funktionsverlauf

Die TSCHEBYSCHEFF'sche Funktion $\mathrm{T}_n(x)$ ist für geraden Grad n auch eine gerade Funktion, für ungeraden Grad eine ungerade Funktion.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_n(-x) &= \cos[n \arccos(-x)] \\ &= \cos[n(\arccos x - \pi)] \\ &= \cos(n \arccos x - n\pi) \\ \mathrm{T}_n(-x) &= (-1)^n \cos(n \arccos x) = (-1)^n \mathrm{T}_n(x) \end{aligned} \tag{B.6}$$

Die Form des Polynoms kann deshalb folgendermaßen angenommen werden.

$$\mathrm{T}_n(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n/2} c_k x^{2k} & (n = 0,2,4,\ldots) \\ x \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2} c_k x^{2k} & (n = 1,3,5,\ldots) \end{cases} \tag{B.7}$$

Der Funktionsverlauf von $\mathrm{T}_n(x)$ ist für einige Werte n in Abbildung B.1 dargestellt.

Die Funktionen $\mathrm{T}_n(x)$ approximieren im Intervall $[-1,+1]$ für eine gegebene Ordnung die Nullinie gleichmäßig[6]. Außerdem bilden die TSCHEBYSCHEFF'schen Funktionen ein sogenanntes Or-

[6] Die Funktion $\mathrm{T}_n(x)$ erfüllt im Sinne der gleichmäßigen Approximation $\|f - g_n\|_\infty \Rightarrow \min$ die Zielfunktion $g(x) = 0$.

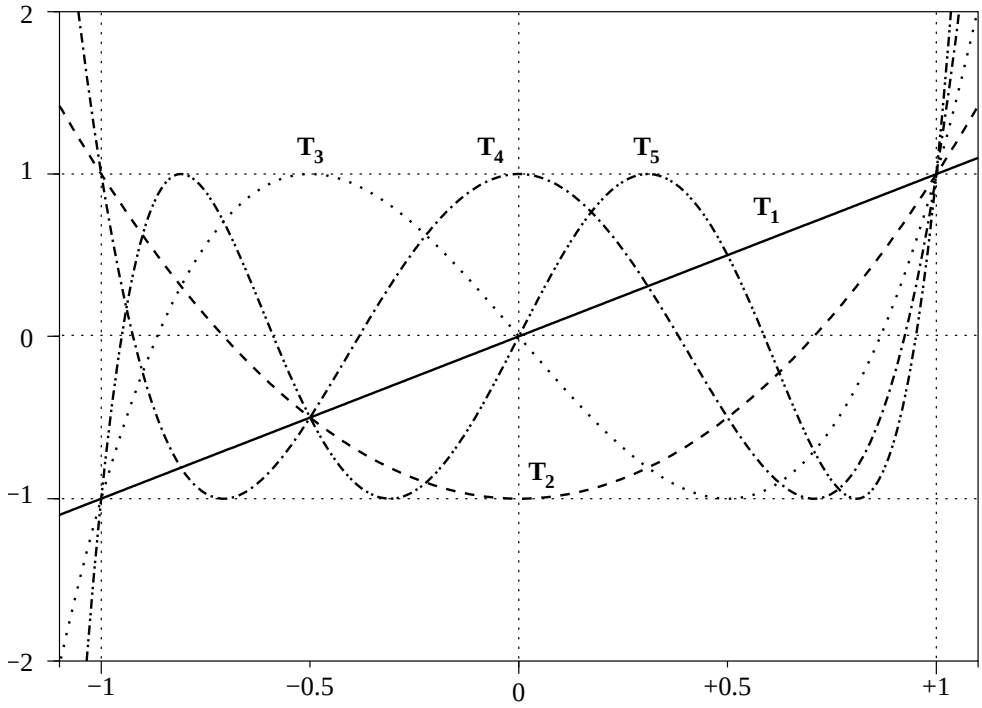


Abbildung B.1.: TSCHEBYSCHEFF-Funktionen $\mathrm{T}_n(x)$

thogonalsystem[7], welches für $n > 0$ durch die Beziehung

$$\delta_{nm} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{T}_n(x)\,\mathrm{T}_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

gekennzeichnet ist [HH92, 1.2.3.], [AS72, 22.5]. Beweisen läßt sich diese Relation ausgehend von der Parameterdarstellung B.2 und der Ableitung $dx/d\varphi = -\sin\varphi = -\sqrt{1-x^2}$, wenn man das Integral folgendermaßen schreibt:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{T}_n(x)\,\mathrm{T}_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Durch Erweiterung des Integrationsintervalls auf $[-\pi, +\pi]$ erhält man ein bekanntes (vollständiges) trigonometrisches Integral.

[7] Orthogonale Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der stetigen Approximation im Mittel (GAUSS-Approximation), denn sie ermöglichen die einfache Berechnung der Koeffizienten für die Näherungsfunktion [Kör88, OM74].

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{T}_n(x)\,\mathrm{T}_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{mn}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung enthält das sogenannte Kronecker-Symbol

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} .$$

B.2.4. Nullstellen

Die Nullstellen $x_{\circ k}$ sind leicht aus der (reellen) Parameterdarstellung B.2 von $\mathrm{T}_n(x)$ zu bestimmen[8].

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ n\varphi_k &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \varphi_k &= \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

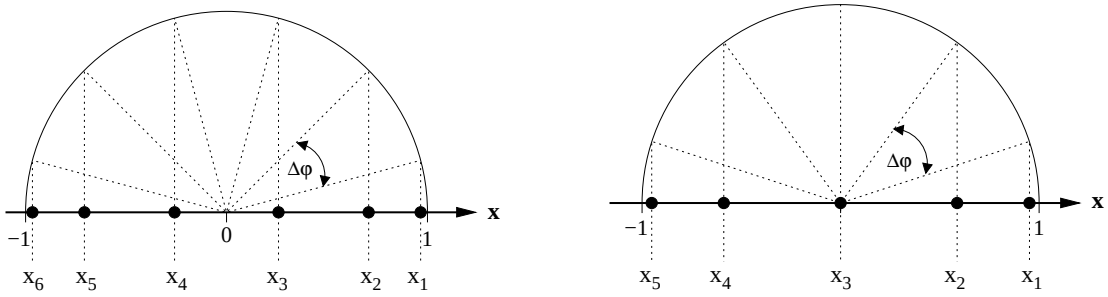
Damit gilt für $x_{\circ k}$

$$\begin{aligned} x_{\circ k} &= \cos\varphi_k \\ &= \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\ x_{\circ k} &= \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, n\,. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Die Einschränkung des Wertebereiches für k ist an dieser Stelle sinnvoll, da sich wegen der Periodizität des Cosinus sonst Werte für $x_{\circ k}$ wiederholen würden[9]. Bei ungeradem Grad n existiert eine Nullstelle $x_{\circ k} = 0$ für den Index $k = (n+1)/2$.

[8] Imaginäre (oder komplexe) Nullstellen existieren nicht, da $\mathrm{T}_n(\mathrm{j}x) = \cosh(n \operatorname{arcosh}|x|)$ die x-Achse niemals schneidet.

[9] Die Anzahl der Nullstellen deckt sich außerdem ausgezeichnet mit dem Grad n des Polynoms $\mathrm{T}_n(x)$ in Gleichung B.4.



(a) $n = 6$ (b) $n = 5$

Abbildung B.2.: Nullstellenverteilung ($\Delta\varphi = \pi/n$)

Betragsmäßig wiederholen sich also die Nullstellen wenn k den Symmetriepunkt $(n+1)/2$ über- bzw. unterschreitet, vgl. Abbildung B.2 und [HH92]. Dieser Fakt kann auch durch die Beziehung $\mathring{x}_{n-k+1} = -\mathring{x}_k$ ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
\mathring{x}_{n-k+1} &= \cos\left[\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\
&= \cos\left[\pi-\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\
&= -\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\
&= -\mathring{x}_k
\end{aligned}$$

Die Linearfaktordarstellung des Polynoms $\mathrm{T}_n(x)$ kann mit dieser Erkenntnis und dem schon bekannten Leitkoeffizienten 2^{n-1} vereinfacht werden. Dazu sei zuerst von ungeradem Grad n ausgegangen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(x) &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x-\mathring{x}_k) \\
&= 2^{n-1}x\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(x-\mathring{x}_k)(x+\mathring{x}_k) \\
&= 2^{n-1}x\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(x^2-\mathring{x}_k^2)
\end{aligned}$$

Für gerades n gilt

$$\mathrm{T}_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n/2} (x^2 - x_{\circ k}^2) \,.$$

B.2.5. Erste Ableitung

Die erste Ableitung ist zum Beispiel aus der Parameterform B.2 zu gewinnen[10].

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} &= -\sin\varphi \\ &= -\sqrt{1-\cos^2\varphi} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Mit der (in gleicher Art und Weise gewonnenen) Ableitung von y nach dem Parameter φ

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} &= -n\sin(n\varphi) \\ &= -n\sqrt{1-\cos^2(n\varphi)} \\ &= -n\sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

ergibt sich $\mathrm{T}_n'(x)$ zu

[10] Noch einfacher ist die Anwendung der Kettenregel auf die analytische Darstellung B.1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n'(x) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{n\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = n\sqrt{\frac{1-\mathrm{T}_n^2(x)}{1-\mathrm{T}_1^2(x)}} \qquad \text{(B.9)} \\
&= \frac{n\sqrt{1-\cos^2(n\arccos x)}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \\
\mathrm{T}_n'(x) &= \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}\,. \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}
$$

Die Extremwerte liegen offensichtlich bei $\cos(k\pi/n)$ wobei $\mathrm{T}_n(x)$ an diesen Stellen abwechselnd die Werte ± 1 annimmt. In Polynomform kann man die Ableitung von $\mathrm{T}_n(x)$ recht einfach aus Formel B.7 gewinnen.

$$
\mathrm{T}_n'(x) = \begin{cases} 2x\sum\limits_{k=0}^{n/2} kc_k x^{2(k-1)} & (n = 0,2,4,\ldots) \\ \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2} (2k+1)c_k x^{2k} & (n = 1,3,5,\ldots) \end{cases} \qquad \text{(B.11)}
$$

Ähnlich wie T_n ist auch $\mathrm{T}_n'(x)$ in Abhängigkeit von n eine gerade oder eine ungerade Funktion.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n'(-x) &= \frac{n\sin[n\arccos(-x)]}{\sin[\arccos(-x)]} \\
&= \frac{n\sin[n(\arccos x-\pi)]}{\sin(\arccos x-\pi)} \\
&= -\frac{n\sin(n\arccos x-n\pi)}{\sin(\arccos x)} \\
\mathrm{T}_n'(-x) &= \frac{n(-1)^{n+1}\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = (-1)^{n+1}\mathrm{T}_n'(x) \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}
$$

B.2.6. Differentialgleichung

Mit den ersten Ableitungen nach dem Parameter φ kann man durch Gleichsetzen mit $\mathrm{d}\varphi$ die folgende Differentialgleichung[11] entwickeln [Kör88, 45], [Mei64, § 4].

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\mathrm{d}y}{n\sqrt{1-y^2}} \\ \frac{\mathrm{d}y}{n\sqrt{1-y^2}} &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (1-x^2)\left[\mathrm{T}_n'(x)\right]^2 &= n^2\left[1-\mathrm{T}_n^2(x)\right] \end{aligned} \tag{B.13}$$

Sie wird durch die Tschebyscheff-Polynome $\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ erfüllt, deren Koeffizienten a_k entweder

- rekursiv durch Anwendung von Gleichung B.4;
- durch Berechnung der Nullstellen nach Formel B.8 gefolgt von Ausmultiplizieren der Linearfaktordarstellung $\mathrm{T}_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x - \mathring{x}_k)$;
- oder aber durch Lösung des sich aus der Differentialgleichung B.13 ergebenden Gleichungssystems[12]

bestimmt werden können.

B.3. Tschebyscheff-Funktionen zweiter Art

Die Tschebyscheff-Funktion zweiter Art ist definiert durch

$$\mathrm{U}_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}\,. \tag{B.14}$$

Vergleich mit Formel B.10 zeigt, daß es sich bei $\mathrm{U}_n(x)$ um die erste Ableitung der Funktion $\mathrm{T}_{n+1}(x)$ handelt.

[11] Die gleiche Differentialgleichung ergibt sich, wenn man $x = \sin u = \cos(u - \pi/2)$ und $y = \cos[n(u - \pi/2)]$ substituiert. Außerdem steckt dieser Ansatz schon implizit in Gleichung B.9.

[12] Die Bestimmung der Koeffizienten aus der Differentialgleichung ist wohl eher ein theoretischer Weg. Praktisch wird fast immer die Rekursionsformel B.4 oder aber eine geschlossene Lösungsformel (die hier nicht abgeleitet wurde, vgl. [Mei64, § 4.2.]) zur Anwendung kommen.

$$\mathrm{U}_n(x) = \frac{1}{n+1}\,\mathrm{T}'_{n+1}$$

Es handelt sich bei diesen Funktionen ebenfalls um orthogonale Polynome, die nach folgender Formel auch rekursiv beschrieben werden können.

$$\mathrm{U}_n(x) = 2x\,\mathrm{U}_{n-1}(x) - \mathrm{U}_{n-2}(x)$$

In Abbildung B.3 ist der Verlauf von $\mathrm{U}_n(x)$ für unterschiedlichen Grad n dargestellt.

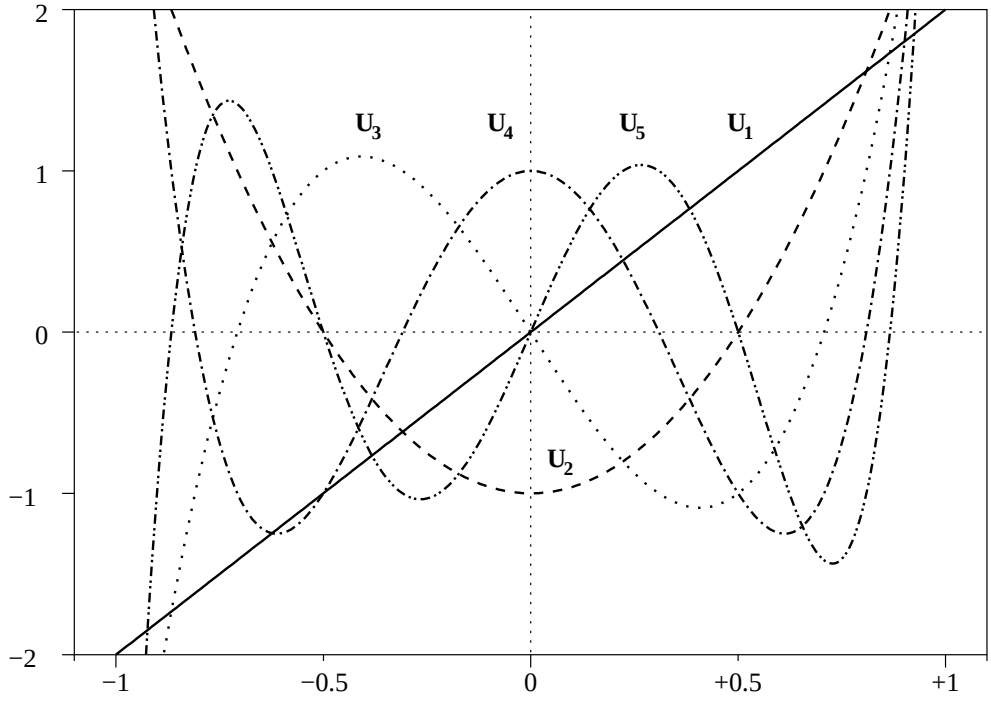


Abbildung B.3.: TSCHEBYSCHEFF-Funktionen $\mathrm{U}_n(x)$

Weitere Informationen zu dieser zweiten Art von TSCHEBYSCHEFF-Funktionen kann man z. B. in [AS72], [HH92] oder [Mei64] nachlesen.

C. Elliptische Integrale und Funktionen

C.1. Einleitung

Dieser Teil behandelt grundlegende Eigenschaften des vollständigen und unvollständigen elliptischen Integrals erster Art sowie der JACOBI'schen elliptischen Funktionen. Leider ist die (für den Ingenieur zumutbare) deutschsprachige Literatur zu diesen Themen nicht unbedingt zahlreich, so daß sich viele Quellenverweise auf ältere oder englischsprachige Werke beziehen.[1] Als Übersichten sind hier vor allem [WW27, Pil54] und natürlich [AS72] zu nennen, weitere Tafeln und ansprechende Abbildungen enthält z. B. [JE52]. Ausschließlich diesem speziellen Thema widmen sich [Ach70], [Tri48] und (nebst einer Einführung in die Funktionentheorie) auch [Hur00]. Weitere Details mit einer Unmenge von Formeln findet man unter anderem in [Cay76] und [Web91]. Alle diese Quellen befassen sich (in unterschiedlicher Tiefe) auch mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, in [Koe74] wird von doppelt-periodischen Funktionen im Allgemeinen ausgegangen. Nicht zu vergessen seien außerdem [Jac29] bzw. [BW91] sowie [Leg28], welche als Ursprungswerke anzusehen sind.

Alle im weiteren dargelegten Beweise stützen sich fast ausschließlich auf die bekannten Grundregeln der höheren Mathematik und sollten deshalb für Ingenieure technischer Fachrichtungen nachvollziehbar sein.[2]

C.2. Elliptische Integrale

Elliptische Integrale sind Integrale der Form $\int R(w,x)dx$, wobei R eine rationale Funktion von w und x, w^2 dagegen eine kubische oder biquadratische Funktion von x ist.[3] Alle diese Parameterintegrale lassen sich auf drei Grundformen reduzieren, die man das LEGENDRE'sche Normalintegral erster Art $\mathrm{F}(\varphi;k)$, zweiter Art $\mathrm{E}(\varphi;k)$ und dritter Art $\Pi(\varphi;k;n)$ nennt [AS72, 17.4.41 ff.], [Tri48, II, § 3], [Hur00, II-6, § 2].

[1] Einige der zitierten Bücher sind dafür aber als Online-Ausgabe der Französischen Nationalbibliothek `http://gallica.bnf.fr` im Internet einsehbar.

[2] Insbesondere wurde auf die Einführung der Theta- sowie WEIERSTRAß'schen Funktionen, welche von vielen Autoren gern zur eleganten Beweisführung verwendet werden, verzichtet (siehe z. B. in [Hur00] und [Ach70]).

[3] Diese Integrale haben ihren Namen wegen der Rolle, die sie bei der Berechnung von Ellipsengrößen (insbesondere der Bogenlänge) spielen.

$$\mathrm{F}(\varphi; k) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$$\mathrm{E}(\varphi; k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}\, \mathrm{d}\phi$$

$$\Pi(\varphi; k; n) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1 + n \sin^2 \phi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

Der allen gemeinsame Parameter k wird Modul genannt. Außerdem ist mit

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \tag{C.1}$$

ein komplementäres Modul definiert. Als hilfreich erweisen sich in vielen Fällen auch die binomischen Darstellungen des Moduls.

$$k^2 = (1 - k')(1 + k') \qquad k'^2 = (1 - k)(1 + k) \tag{C.2}$$

C.2.1. Unvollständiges elliptisches Integral erster Art

C.2.1.1. Definition

Legendre'sche Normalform Das unvollständige elliptische Integral erster Art ist in seiner Legendre-Form folgendermaßen definiert

$$\mathrm{F}(\varphi; k) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \tag{C.3}$$

wobei mit k das Modul und φ die Amplitude bezeichnet wird.

Jacobi-Form Mit der Substitution $t = \sin\phi$ in Gleichung C.3 gelangt man zu der von C.G.J. Jacobi bevorzugten Form.

$$\mathrm{F}(\varphi; k) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad x = \sin\varphi \tag{C.4}$$

Beweis. Einsetzen der Substitution sowie der Ableitung $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\phi = \cos\phi$ in Definitionsgleichung C.3 führt sofort zum Ergebnis

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\varphi; k) &= \int_{\phi=0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\ &= \int_0^{\sin\varphi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,.\end{aligned}$$

□

Um im weiteren die Eindeutigkeit zu gewährleisten und außerdem eine einfache Schreibweise des Integrals bei Verwendung des Argumentes x zu erhalten, soll außerdem definiert sein:

$$\underset{\star}{\mathrm{F}}(x; k) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,. \tag{C.5}$$

Riemann'sche Normalform Eine weitere, heute nicht mehr so geläufige Form, ist die Riemann'sche Form. Sie kommt zustande, wenn man in der Jacobi'schen Darstellung nach Gleichung C.5 den Term $t^2 = \xi$ substituiert. Mit dem zugehörigen Differential $\mathrm{d}\xi = 2t\,\mathrm{d}t$ ergibt sich so

$$\underset{\star}{\mathrm{F}}(x; k) = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

und letztlich (die nicht besonders gekennzeichnete) Riemann'sche Normalform des Integrals.

$$\int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

Gauss-Form Eine von C.F. Gauss intensiv verwendete Form des elliptischen Integrals erster Art[4] ist

$$\int_0^w \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} = \frac{1}{a}\mathrm{F}(\varphi;k), \qquad w = b\tan\varphi \tag{C.6}$$

mit dem Modul

$$k = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{C.7}$$

sowie dem komplementären Modul (konform zu Definitionsgleichung C.1)

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{b}{a}\,. \tag{C.8}$$

Beweis. Um dieses Integral auf $\mathrm{F}(\varphi;k)$ zurückzuführen, wird zuerst eine passende Substitution nach [AS72, 17.4.41 ff.] gewählt

$$\tan\phi = \frac{t}{b} \tag{C.9}$$

und dann mit Hilfe von $(\tan\phi)' = 1+\tan^2\phi = \cos^{-2}\phi$ die Ableitung $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\phi$ gebildet.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\phi} = b(1+\tan^2\phi) = \frac{b}{\cos^2\phi}$$

Einsetzen in das Ausgangsintegral ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^w \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} &= \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(1-b^2/a^2)\sin^2\phi}}\,.\end{aligned} \tag{C.10}$$

[4] Weitere Integrale dieser Art, die alle Vorzeichenkombinationen der Summanden abdecken, sind in [AS72, 17.4.41 ff.] zu finden.

Vergleich mit Formel C.3 zeigt, daß es sich hier um das unbestimmte elliptische Integral erster Art $a^{-1}\mathrm{F}(\varphi; k)$ handelt.[5] □

Legendre'sche Normalform mit Modulwinkel Manchmal wird das elliptische Integral erster Art auch über den sogenannten Modulwinkel Θ, mit $k = \sin\Theta$, angegeben.[6]

$$\mathrm{F}(\varphi; \Theta) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\Theta \sin^2\phi}}$$

C.2.1.2. Spezielle Werte

Der Funktionswert für $\varphi = 0$ ist trivial und direkt aus Definitionsgleichung C.3 ersichtlich.

$$\mathrm{F}(0; k) = 0$$

Für $\varphi = \pi/2$ entartet die Funktion zum vollständigen elliptischen Integral erster Art $\mathrm{K}(k)$, wobei k dann die Rolle des Arguments übernimmt (vgl. Abschnitt C.2.2).

$$\mathrm{F}(\tfrac{\pi}{2}; k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}} = \mathrm{K}(k) \tag{C.11}$$

Der Funktionswert bei $\varphi = \pi$ ergibt sich auf dieser Grundlage zu $2\mathrm{K}(k)$.

[5] Ein Vergleich mit Formel C.5 führt zur Relation $w = bx(1 - x^2)^{-1/2}$.
[6] Diese Schreibweise ist in der elektrischen Filtertheorie recht verbreitet [Cau54], [Zve67].

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\pi; k) &= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\
&= \mathrm{K}(k) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi+\pi)}} \\
&= 2\mathrm{K}(k)
\end{aligned}$$

□

C.2.1.3. Spezielle Module

Für spezielle Module sind geschlossene Lösungen des Integrals möglich.

$$\mathrm{F}(\varphi; 0) = \int_0^{\varphi} \mathrm{d}\phi = \varphi \tag{C.12}$$

$$\mathrm{F}(\varphi; 1) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos\phi} = \int_0^{\varphi} \sec\phi\,\mathrm{d}\phi = \ln\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \tag{C.13}$$

C.2.1.4. Funktionsverlauf

Zuerst sei auf Abbildung C.1 verwiesen, die $\mathrm{F}(\varphi; k)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ darstellt. Relativ leicht nachzuweisen ist, daß $\mathrm{F}(\varphi; k)$ eine ungerade Funktion ist.

Beweis. Mit der Substitution $-\phi = \psi$ in der Definitionsgleichung des Integrals kann man schnell beweisen, daß $\mathrm{F}(-\varphi; k) = -\mathrm{F}(\varphi; k)$ gilt.

$$\mathrm{F}(-\varphi; k) = \int_{\phi=0}^{-\varphi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \int_{\psi=0}^{\varphi} \frac{-\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -\mathrm{F}(\varphi; k)$$

□

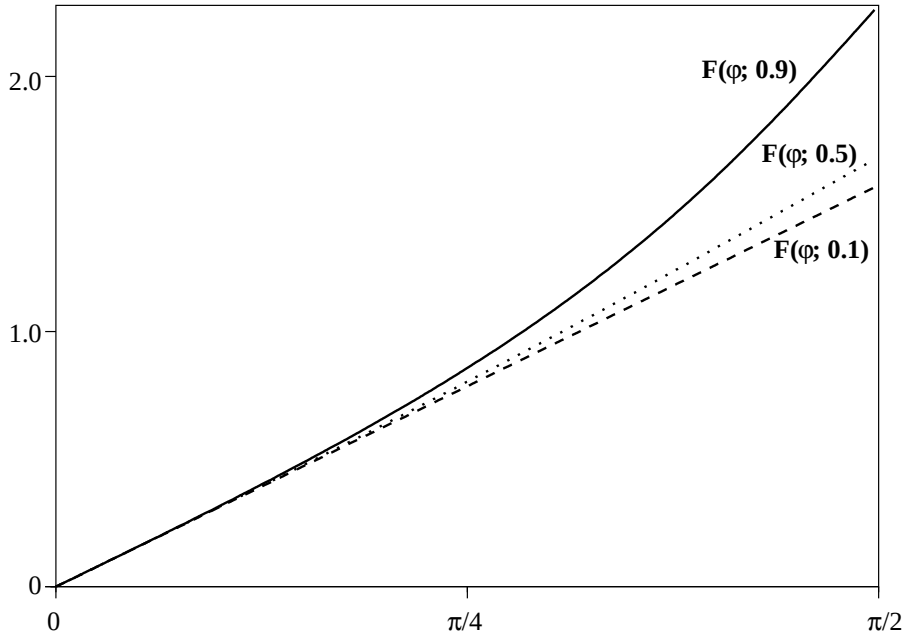


Abbildung C.1.: $\mathrm{F}(\varphi; k)$ für verschiedene Module k

$\mathrm{F}(\varphi; k)$ ist für alle φ eine monoton steigende Funktion. Die Begründung liegt in Gleichung C.16, der ersten Ableitung von $\mathrm{F}(\varphi; k)$. Für kleine Werte k gilt $\mathrm{F}(\varphi; k) \approx \frac{2}{\pi}\varphi \mathrm{K}(k)$, was sich direkt aus Abbildung C.1 ablesen läßt, wenn man außerdem Gleichung C.11 berücksichtigt.

Eine besondere Bedeutung im Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen (Abschnitt C.3) hat folgende Relation, die auch in Abbildung C.2 erkennbar ist.

$$\mathrm{F}(\varphi + n\pi; k) = \mathrm{F}(\varphi; k) + 2n\mathrm{K}(k) \tag{C.14}$$

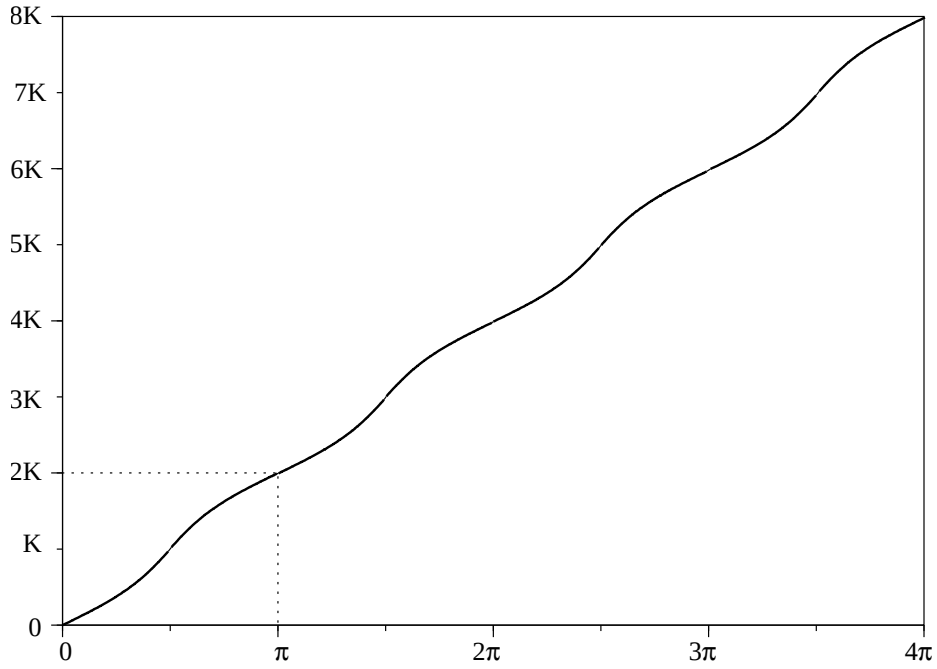


Abbildung C.2.: $\mathrm{F}(\varphi; k)$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq 4\pi$

Beweis. Sie ergibt sich, wenn man mit $n = 1$ beginnt und dann iterativ fortsetzt.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\varphi+\pi; k) &= \int_0^{\varphi+\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\
&= \int_{-\pi}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\psi+\pi)}} \\
&= \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \int_0^{-\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \\
&= \mathrm{F}(\varphi; k) + \mathrm{F}(\pi; k) \\
&= \mathrm{F}(\varphi; k) + 2\mathrm{K}(k)
\end{aligned} \tag{C.15}$$

□

Außerdem ist Gleichung C.14 eine logische Schlußfolgerung, wenn man wie gewohnt das Integral als Fläche unter der periodischen Kurve $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$ interpretiert (vgl. Abbildung C.3).

Aus der zweiten Ableitung nach Gleichung C.17 und dem Funktionsverlauf entsprechend Abbildung C.2 ist ersichtlich, daß die Wendepunkte bei $\upsilon \cdot \pi/2$ mit $\upsilon \in \mathbb{Z}$ liegen.

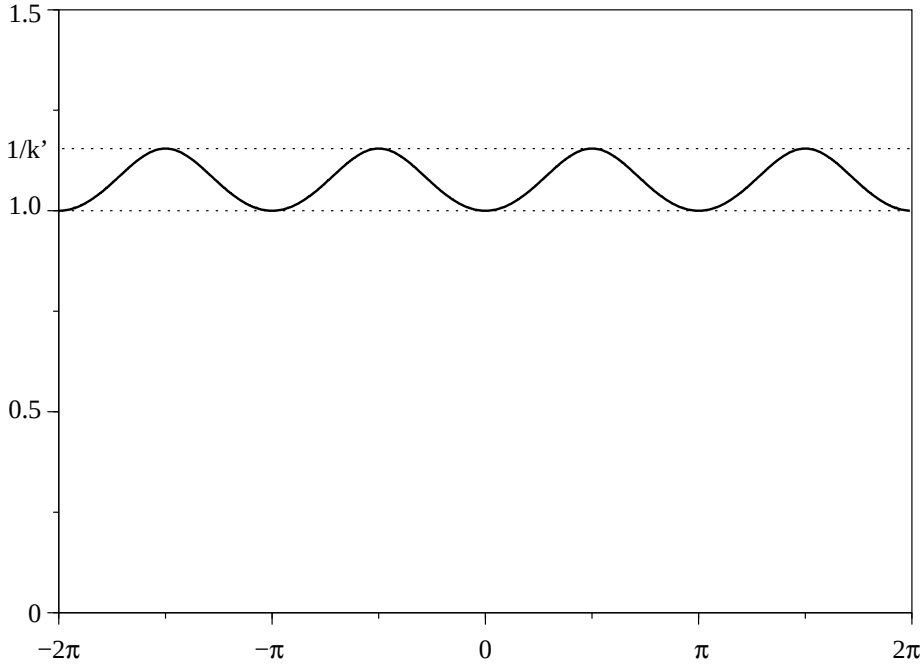


Abbildung C.3.: Funktionsverlauf des Integranden $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$

C.2.1.5. Erste Ableitung

Das Differential von $\mathrm{F}(\varphi;k)$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung[7]

$$\mathrm{F}'(\varphi;k)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{C.16}$$

C.2.1.6. Zweite Ableitung

Nochmaliges Differenzieren der ersten Ableitung $\mathrm{F}'(\varphi;k)$ ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{F}''(\varphi;k)&=-\frac{1}{2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}(-2k^2\sin\varphi\cos\varphi)\\&=\frac{k^2}{2}\mathrm{F}'(\varphi;k)\sin 2\varphi\,.\end{aligned} \tag{C.17}$$

[7] $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=f(x)$

C.2.1.7. Imaginäre Argumente

Für imaginäre Argumente entartet das unvollständige elliptische Integral zu

$$\mathrm{F}(\mathrm{j}\xi; k) = \mathrm{j}\,\mathrm{F}\left[\arctan(\sinh\xi); k'\right] . \tag{C.18}$$

Beweis. Einsetzen des imaginären Arguments im Sinne von $\varphi = \mathrm{j}\xi$ in Definitionsgleichung C.3 führt zu

$$\mathrm{F}(\mathrm{j}\xi; k) = \int_{\phi=0}^{\mathrm{j}\xi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(1-k'^2)\sin^2\phi}} .$$

Mit der (im Intervall $|\phi| \leq \pi/2$) eindeutigen Substitution

$$\sin\phi = \mathrm{j}\tan\theta \tag{C.19}$$

und deren Ableitung $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = \mathrm{j}/\cos\theta$ kann man das Differential $\mathrm{d}\phi/\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$ relativ einfach mit Hilfe des komplementären Moduls k' ausdrücken.[8]

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\varphi; k) &= \int_{\sin\phi=0}^{\sin\phi=\sin\varphi} \frac{\mathrm{j}\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta\sqrt{1+(1-k'^2)\tan^2\theta}} \\
&= \mathrm{j}\int_{\tan\theta=0}^{\mathrm{j}\tan\theta=\sin\mathrm{j}\xi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+(1-k'^2)\sin^2\theta}} \\
&= \mathrm{j}\int_{0}^{\arctan(\sinh\xi)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}
\end{aligned} \tag{C.20}$$

□

Schreibt man die rechte Seite von Gleichung C.18 mit Hilfe der Gudermann-Funktion $\mathrm{gd}\xi = \arctan(\sinh\xi)$, dann gilt entsprechend:

[8] Gleichung C.19 stellt im Prinzip Jacobi's imaginäre Transformation dar.

$$\mathrm{F}(\mathrm{j}\xi; k) = \mathrm{j}\mathrm{F}(\mathrm{gd}\,\xi; k')\,.$$

C.2.2. Vollständiges elliptisches Integral erster Art

C.2.2.1. Definition

Das vollständige elliptische Integral erster Art wird meist in den folgenden drei Formen, die sich durch die Art des Arguments unterscheiden, angegeben:

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad 0 \le |k| \le 1 \tag{C.21}$$

$$\mathrm{K}(m) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \qquad 0 \le m \le 1 \tag{C.22}$$

$$\mathrm{K}(\phi) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2\sin^2\phi)}}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2} \tag{C.23}$$

Häufig ist auch die Darstellung in der Legendre'schen Normalform nach Gleichung C.24, die sich wieder mit der Substitution $t = \sin\phi$ aus Definitionsgleichung C.21 ergibt.

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{C.24}$$

Von Bedeutung ist auch das komplementäre elliptische Integral K′.

$$\mathrm{K}' = \mathrm{K}(k') = \mathrm{K}\left(\sqrt{1-k^2}\right) \tag{C.25}$$

C.2.2.2. Spezielle Werte

$$\mathrm{K}(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2} = \mathrm{K}'(1) \tag{C.26}$$

$$\mathrm{K}(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\cos\phi} = \infty = \mathrm{K}'(0)$$

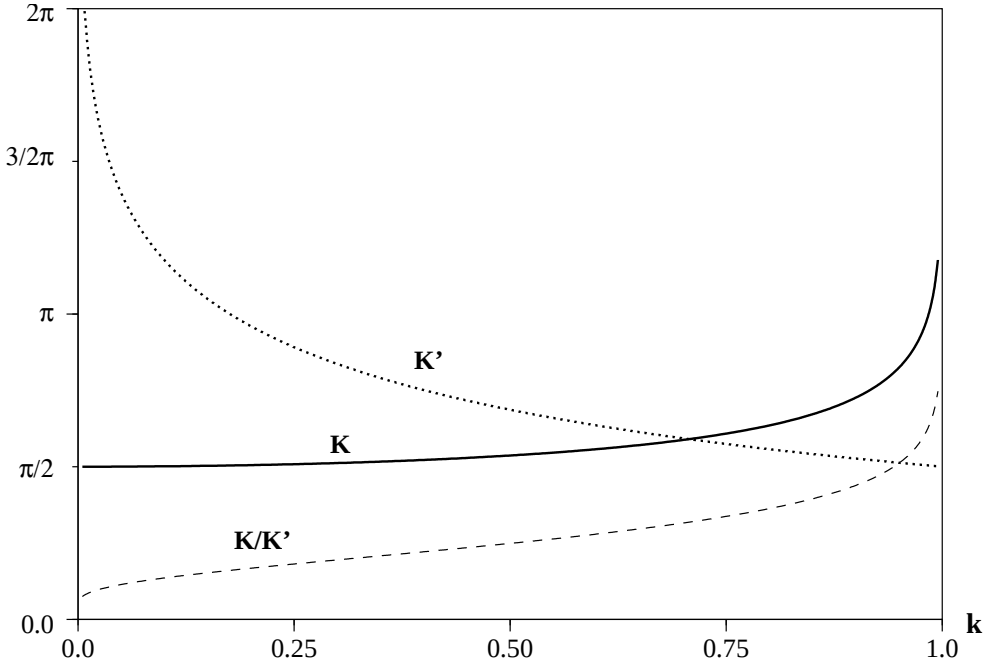


Abbildung C.4.: K, K′ und K / K′ als Funktion des Moduls k

C.2.2.3. Funktionsverlauf

Die Funktionsverläufe von K und K′ sowie das Verhältnis beider Integrale für reelles Argument k sind in Abbildung C.4 dargestellt.

C.2.2.4. Gauss-Form

Eine schon in Abschnitt C.2.1 mit Hinweis auf C.F. Gauss eingeführte Variante dieses Integraltyps ist

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} \,. \tag{C.27}$$

Wie schon in Gleichung C.6 kann es auch dargestellt werden als

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} &= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(1-b^2/a^2)\sin^2\phi}} \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{F}\left[\frac{\pi}{2};\ \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right] \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{K}\left[\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{C.28}$$

Mit dem Modul entsprechend Gleichung C.7 ergibt sich die Äquivalenz

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{a}\mathrm{K}(k)\ .$$

C.3. Elliptische Funktionen

C.3.1. Definition

Die Definition der Jacobi'schen elliptischen Funktionen ist eng verknüpft mit der Umkehrfunktion des unvollständigen elliptischen Integrals erster Art $u = \mathrm{F}(\varphi; k)$ in seiner Legendre'schen Normalform nach Gleichung C.3, der sogenannten Amplitudenfunktion.

$$\varphi = \mathrm{am}(u; k)\ . \tag{C.29}$$

Mit Hilfe von $\mathrm{am}(u; k)$ können die drei elliptischen Basisfunktionen *Sinus Amplitudinis* sn, *Cosinus Amplitudinis* cn und *Delta Amplitudinis* dn folgendermaßen angegeben werden [Jac29, § 17]:

$$\mathrm{sn}(u;k) = \sin[\mathrm{am}(u;k)] = \sin\varphi = x \tag{C.30}$$

$$\mathrm{cn}(u;k) = \cos[\mathrm{am}(u;k)] = \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-x^2} \tag{C.31}$$

$$\mathrm{dn}(u;k) = \Delta\,\mathrm{am}(u;k) = \varDelta(\varphi;k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{1-k^2x^2}\,. \tag{C.32}$$

Nahezu direkt ablesbar sind die wichtigen Beziehungen:

$$\mathrm{sn}^2(u;k) + \mathrm{cn}^2(u;k) = 1 \tag{C.33}$$

$$\mathrm{dn}^2(u;k) + k^2\mathrm{sn}^2(u;k) = 1\,. \tag{C.34}$$

Über das komplementäre Modul $k' = \sqrt{1-k^2}$ sind weitere nützliche Identitäten zu ermitteln.

$$k^2\mathrm{cn}^2(u;k) + k'^2 = \mathrm{dn}^2(u;k) \tag{C.35}$$

$$\mathrm{cn}^2(u;k) + k'^2\mathrm{sn}^2(u;k) = \mathrm{dn}^2(u;k) \tag{C.36}$$

Gleichung C.30 läßt nun auch die folgende neue Darstellung des unvollständigen elliptischen Integrals entsprechend Definitionsgleichung C.5 zu.

$$u = \underset{\star}{\mathrm{F}}(x;k) = \int_0^{\mathrm{sn}(u;k)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{C.37}$$

Von den drei Basisfunktionen sind alle weiteren Jacobi'schen elliptischen Funktionen folgendermaßen abgeleitet:[9] die mit den Buchstaben pq abgekürzte Funktion ist definiert als der Quotient der Basisfunktionen p und q. Dabei können p und q mit folgenden Buchstaben besetzt sein: s (sn), c (cn), d (dn), n (1), was zu 9 Varianten führt.

[9] Diese heutige kurze Notation stammt von W.L. Glaisher und C. Gudermann.

$$\mathrm{sc}(u;k) = \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\mathrm{cn}(u;k)} \qquad \mathrm{sd}(u;k) = \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)} \qquad \mathrm{ns}(u;k) = \frac{1}{\mathrm{sn}(u;k)}$$

$$\mathrm{cs}(u;k) = \frac{\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{sn}(u;k)} \qquad \mathrm{cd}(u;k) = \frac{\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)} \qquad \mathrm{nc}(u;k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(u;k)}$$

$$\mathrm{ds}(u;k) = \frac{\mathrm{dn}(u;k)}{\mathrm{sn}(u;k)} \qquad \mathrm{dc}(u;k) = \frac{\mathrm{dn}(u;k)}{\mathrm{cn}(u;k)} \qquad \mathrm{nd}(u;k) = \frac{1}{\mathrm{dn}(u;k)}$$

C.3.2. Spezielle Werte

Die speziellen Werte für die drei elliptischen Basisfunktionen ergeben sich direkt aus denen der Amplitudenfunktion $\mathrm{am}(u;k)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{am}(0;k) &= 0 \\
\mathrm{am}(K;k) &= \frac{\pi}{2} \\
\mathrm{am}(2K;k) &= \pi \\
\mathrm{am}(2nK;k) &= n\pi
\end{aligned}$$

welche sich selbst wiederum (im Sinne ihrer Definition als Umkehrfunktion) aus den speziellen Werten von $\mathrm{F}(\varphi;k)$ ergeben (vgl. Abschnitt C.2.1).

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(0;k) &= 0 & \mathrm{cn}(0;k) &= 1 & \mathrm{dn}(0;k) &= 1 \\
\mathrm{sn}(K;k) &= 1 & \mathrm{cn}(K;k) &= 0 & \mathrm{dn}(K;k) &= \sqrt{1-k^2} = k' \\
\mathrm{sn}(2K;k) &= 0 & \mathrm{cn}(2K;k) &= -1 & \mathrm{dn}(2K;k) &= 1 \\
\mathrm{sn}(3K;k) &= -1 & \mathrm{cn}(3K;k) &= 0 & \mathrm{dn}(3K;k) &= k'
\end{aligned}$$

Aus den Formeln für halbe Argumente (siehe Gleichung C.54) kann man die Werte für $u = \mathrm{K}/2$ ermitteln.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}\left(\tfrac{K}{2}; k\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+k'}} = \frac{\operatorname{cn}(K/2; k)}{\operatorname{dn}(K/2; k)} \\
\operatorname{cn}\left(\tfrac{K}{2}; k\right) &= \sqrt{\frac{k'}{1+k'}} \\
\operatorname{dn}\left(\tfrac{K}{2}; k\right) &= \sqrt{k'}
\end{aligned} \tag{C.38}$$

C.3.3. Spezielle Module

Die folgenden speziellen Werte für das Modul k ergeben sich direkt aus den Gleichungen C.12 und C.13.[10]

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u; 1) &= \tanh u \\
\operatorname{cn}(u; 1) &= \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} \\
\operatorname{dn}(u; 1) &= \operatorname{sech} u
\end{aligned}$$

Für verschwindendes Modul erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u; 0) &= \sin u \\
\operatorname{cn}(u; 0) &= \cos u \\
\operatorname{dn}(u; 0) &= 1\,.
\end{aligned}$$

C.3.4. Funktionsverlauf

Durch die Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf die Amplitudenfunktion $\operatorname{am}(u; k)$ und wegen Gleichung C.14 sind alle elliptischen Funktionen periodisch. Wie Abbildung C.5 illustriert, ist dabei $K = \mathrm{K}(k)$ entweder die sogenannte (reelle) Halb- oder Viertelperiode.[11]

[10] Ursache ist, daß das unvollständige elliptische Integral erster Art $\mathrm{F}(\varphi; k)$ für $k = 0$ und $k = 1$ entartet (siehe Abschnitt C.2).

[11] In Analogie zu den einfach-periodischen Funktionen, wie z. B. $\sin x$ und $\cos x$, deren Perioden bekanntlich 2π betragen, ist es bei doppelt-periodischen Funktionen (insbesondere den Weierstrass'schen elliptischen $\wp$-Funktionen) meist üblich, die Periode mit 2ω zu bezeichnen [WW27, § 20·1], [Tri48, I, § 2].

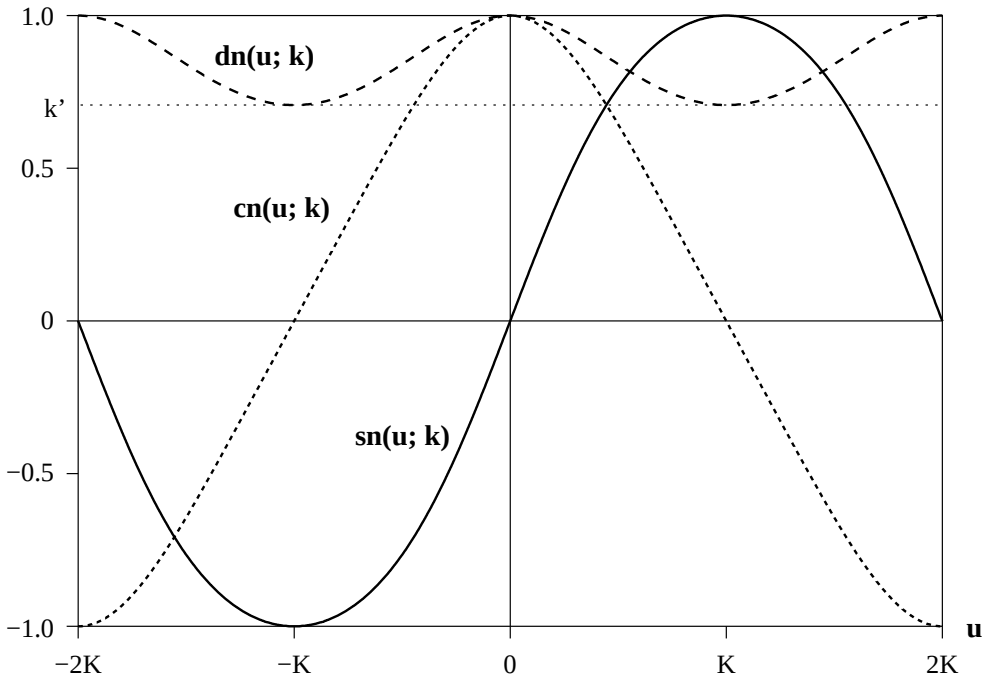


Abbildung C.5.: Elliptische Basisfunktionen

Die Funktionsverläufe aller anderen Jacobi'schen elliptischen Funktionen sind zum Beispiel in [AS72] zu finden.

Zu bemerken ist an dieser Stelle, daß anders als bei den trigonometrischen Funktionen im allgemeinen immer gilt $\mathrm{sn}(u+K;k) \neq \mathrm{cn}(u;k)$.

C.3.5. Erste Ableitung

Um die Ableitung von $\mathrm{sn}(u;k)$ zu bestimmen soll zuerst das Differential der Amplitudenfunktion $\mathrm{am}(u;k)$ ermittelt werden. Unter Berücksichtigung von Gleichung C.16 ergibt sich im Zusammenhang mit der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion:

$$\mathrm{am}'(u;k) = \frac{1}{\mathrm{F}'(u;k)} = \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,.$$

Nun kann mit Hilfe der Kettenregel weiter abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}'(u;k) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sin\mathrm{am}(u;k) \\
&= \cos\mathrm{am}(u;k)\cdot\mathrm{am}'(u;k) \\
&= \mathrm{cn}(u;k)\sqrt{1-k^2\sin^2 u} \\
&= \mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k)
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Die erste Ableitung für $\mathrm{cn}(u;k)$ kann entweder in gleicher Art und Weise ermittelt werden, oder aber wie in [Koe74, 19] durch direkte Differentiation von Gleichung C.33.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{sn}^2(u;k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{cn}^2(u;k) \\
0 &= \mathrm{sn}(u;k)\mathrm{sn}'(u;k) + \mathrm{cn}(u;k)\mathrm{cn}'(u;k) \\
0 &= \mathrm{sn}(u;k)\mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k) + \mathrm{cn}(u;k)\mathrm{cn}'(u;k) \\
\mathrm{cn}'(u;k) &= -\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k)
\end{aligned}$$

Für $\mathrm{dn}(u;k)$ kann wieder äquivalent vorgegangen werden, nur Ausgangspunkt ist diesmal Gleichung C.34.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{dn}^2(u;k) + k^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{sn}^2(u;k) \\
0 &= \mathrm{dn}(u;k)\mathrm{dn}'(u;k) + k^2\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{sn}'(u;k) \\
0 &= \mathrm{dn}(u;k)\mathrm{dn}'(u;k) + k^2\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k) \\
\mathrm{dn}'(u;k) &= -k^2\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{cn}(u;k)
\end{aligned}$$

Mit $x = \mathrm{sn}(u;k)$ entsprechend der Definitionsgleichung C.30 des elliptischen Sinus' sowie den Relationen C.33 und C.34 lassen sich außerdem folgende Darstellungen angeben.

$$\begin{aligned}
x'^2 &= (1-x^2)(1-k^2x^2), & x &= \mathrm{sn}(u;k) \\
x'^2 &= (1-x^2)(k'^2+k^2x^2), & x &= \mathrm{cn}(u;k) \\
x'^2 &= (1-x^2)(x^2-k'^2), & x &= \mathrm{dn}(u;k)
\end{aligned}$$

C.3.6. Zweite Ableitung

Für den elliptischen Sinus sei hier noch exemplarisch die zweite Ableitung entwickelt.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}''(u;k) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k) \\
&= \mathrm{dn}(u;k)\mathrm{cn}'(u;k) + \mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}'(u;k) \\
&= -\mathrm{dn}(u;k)\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k) - k^2\mathrm{cn}(u;k)\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{cn}(u;k) \\
&= -\mathrm{sn}(u;k)\left[\mathrm{dn}^2(u;k) + k^2\mathrm{cn}^2(u;k)\right]
\end{aligned}$$

In gleicher Art und Weise ergibt sich für die anderen beiden Funktionen

$$\begin{aligned}
\mathrm{cn}''(u;k) &= -\mathrm{cn}(u;k)\left[\mathrm{dn}^2(u;k) - k^2\mathrm{sn}^2(u;k)\right] \\
\mathrm{dn}''(u;k) &= k^2\mathrm{dn}(u;k)\left[\mathrm{sn}^2(u;k) - \mathrm{cn}^2(u;k)\right] .
\end{aligned}$$

Wie für die erste Ableitung auch, kann man die Gleichungen ebenfalls auf der Basis von x schreiben.

$$\begin{aligned}
x''^2 &= -x(1+k^2-2k^2x^2), && x = \mathrm{sn}(u;k) \\
x''^2 &= -x(1-2k^2+2k^2x^2), && x = \mathrm{cn}(u;k) \\
x''^2 &= x(2-k^2-2x^2), && x = \mathrm{dn}(u;k)
\end{aligned}$$

C.3.7. Additionstheoreme

Die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen haben grundlegende Bedeutung für viele weitere Formeln. Deshalb haben zahlreiche Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts, unter anderem A.-M. Legendre, C.G.J. Jacobi, J. Landen und C.F. Gauss, sich mit dem Beweis dieser Gleichungen beschäftigt.[12] Zuerst hat jedoch L. Euler im Jahre 1756/57 das Additionstheorem des elliptischen Sinus' (Euler-Theorem) bewiesen [WW27, § 22·2], [Hur00, II-3].

[12] In [Cay76, II] sind einige der Beweiswege enthalten.

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{C.40}$$

Beweis. Der hier dargelegte Beweis folgt (wie auch [Ach70, § 28]) in wesentlichen Schritten den Ausführungen von J.G. Darboux. Als Ausgangspunkt dient dabei die Differentialgleichung der Transformationstheorie (Formel C.69 für den Fall $\lambda = k$ und $M = 1$),

$$\frac{M\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2\theta}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

für die hier eine Lösung gefunden werden soll. Genauso wie in Abschnitt C.4.5 erweist es sich als günstig zur Parameterform des Differentials überzugehen.

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \tag{C.41}$$

Die einzelnen Ableitungen nach u kann man integrieren

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$
$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \underset{\star}{\mathrm{F}}(x;k) \qquad v = u - A = \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \underset{\star}{\mathrm{F}}(y;k) \tag{C.42}$$

und (bei Berücksichtigung der Integrationskonstante A) Gleichung C.41 auch darstellen als:

$$u - v = A\,.$$

Nach diesen einfachen Vorbetrachtungen differenziert man nun das Quadrat der Ableitungen dx/du sowie dy/du in den Gleichungen C.42 nocheinmal nach u, also folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[(1-x^2)(1-k^2x^2)\right] \\
2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} &= -2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}(1-k^2x^2) - 2xk^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}(1-x^2) \\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} &= x(2k^2x^2-k^2-1)\,.
\end{aligned}
$$

Auf dem gleichen Weg gelangt man zu:

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} = y(2k^2y^2-k^2-1)\,.
$$

Stellt man die zuletzt gewonnenen Formeln nach $1+k^2$ um und setzt sie nach Multiplikation mit xy beide gleich, so erhält man das folgende wichtige Zwischenergebnis

$$
\begin{aligned}
2k^2x^2xy - y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} &= 2k^2y^2xy - x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} \\
y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} - x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2} &= 2k^2xy(x^2-y^2) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} - x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right) &= 2k^2xy(x^2-y^2)\,. \qquad \text{(C.43)}
\end{aligned}
$$

Jetzt soll unabhängig davon der Ausdruck

$$
y^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 - x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2
$$

bestimmt werden. Einsetzen der Ableitungen von C.42 gefolgt von Ausmultiplizieren und Zusammenfassen führt zur nächsten Zwischengleichung.

$$
\begin{aligned}
y^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 - x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2 &= y^2(1-x^2)(1-k^2x^2) - x^2(1-y^2)(1-k^2y^2) \\
&= y^2 + k^2y^2x^4 - x^2 - k^2x^2y^4 \\
&= (y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2) \qquad \text{(C.44)}
\end{aligned}
$$

Nun dividiert man Gleichung C.43 durch die soeben entwickelte und wendet auf den linken Nenner den binomischen Satz an.

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)}{y^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2-x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2}=\frac{2k^2xy(x^2-y^2)}{(y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2)}$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)}{y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}=\frac{2k^2xy(x^2-y^2)(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u})}{(y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2)}$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)}{y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}=\frac{2k^2xy(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u})}{(k^2x^2y^2-1)}$$

Es ist zu erkennen, daß auf beiden Seiten Zähler und Nenner dem logarithmischen Differentiationssatz $[\ln f(u)]' = f'(u)/f(u)$ entsprechen.[13]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\left(k^2x^2y^2-1\right)$$

Integration nach u und Einsetzen der Differentiale von Gleichung C.42 führt zu

$$\ln\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)=\ln\left(k^2x^2y^2-1\right)+B$$

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=C\left(k^2x^2y^2-1\right)$$

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=C\left(k^2x^2y^2-1\right),$$

also

$$\frac{y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}-x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{k^2x^2y^2-1}=C\,.$$

Mit $\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}=\mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k)$ und $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}=\mathrm{cn}(v;k)\mathrm{dn}(v;k)$ nach Definitionsgleichung C.32 und C.30 gilt also:

[13] Für die rechte Seite gilt bei Anwendung der Produktregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(k^2x^2y^2-1)=k^2\left(2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}y^2+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}x^2\right)=2k^2xy\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)$

$$C = \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{k^2 x^2 y^2 - 1} .$$

Die Konstante C muß nun aber eine Funktion von A sein, also $C = \phi(A) = \phi(u - v)$ gelten. Um die Form von ϕ zu finden kann man z. B. $v = 0$ setzen, was zu $C = \operatorname{sn}(u; k) = \phi(u)$ führt. Also ist die Form von ϕ der elliptische Sinus und somit ist der Beweis auf der Grundlage des folgenden Subtraktionstheorems erbracht.

$$\operatorname{sn}(u - v) = \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{k^2 x^2 y^2 - 1}$$

□

Die beiden anderen elliptischen Basisfunktionen sind entweder genauso oder aber aus ihren Definitionsgleichungen abzuleiten. Hier wird jedoch darauf verzichtet und statt dessen nur das Ergebnis präsentiert (wobei in den Formeln wieder auf das Modul k verzichtet wird).

$$\operatorname{cn}(u + v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{C.45}$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{C.46}$$

Äußerst interessant sind auch die daraus abgeleiteten Relationen[14] für den elliptischen Sinus

$$\operatorname{sn}(u + a) \operatorname{sn}(u - a) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \tag{C.47}$$

$$[1 - \operatorname{sn}(u + a)][1 - \operatorname{sn}(u - a)] = \frac{(\operatorname{cn} a - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} a)^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \tag{C.48}$$

$$[1 - k \operatorname{sn}(u + a)][1 - k \operatorname{sn}(u - a)] = \frac{(\operatorname{dn} a - k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} a)^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 a} \tag{C.49}$$

die insbesondere in der Transformationstheorie häufig auch in folgender Form anzutreffen sind (mit $\operatorname{sn}(K - a) = \operatorname{cn} a / \operatorname{dn} a$, vgl. Tabelle C.3)

[14] In [Cay76, § 93] und [Web91, § 93] sind zahlreiche Relationen dieser Art tabelliert.

$$\frac{[1-\mathrm{sn}(u+a)][1-\mathrm{sn}(u-a)]}{\mathrm{cn}^2 a} = \frac{\left[1-\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}(K-a)}\right]^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a}$$
$$\frac{[1-k\,\mathrm{sn}(u+a)][1-k\,\mathrm{sn}(u-a)]}{\mathrm{dn}^2 a} = \frac{[1-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(K-a)]^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a}\,.$$

Im Zusammenhang mit den quadratischen Transformationen ist auch folgende Relation interessant

$$(1+k')\,\mathrm{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)\mathrm{sn}\left(u+\frac{K}{2}\right) = -\frac{1-(1+k')\,\mathrm{sn}^2 u}{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2 u}\,. \tag{C.50}$$

Beweis. Es handelt sich hier um einen Spezialfall von Formel C.47 mit $a = K/2$.

$$(1+k')\,\mathrm{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)\mathrm{sn}\left(u+\frac{K}{2}\right) = (1+k')\frac{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2(K/2)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(K/2)}$$

Ersetzt man noch den speziellen Wert $\mathrm{sn}(K/2;k) = (1+k')^{-1/2}$, so ist der Beweis schon erbracht.

$$\begin{aligned}(1+k')\,\mathrm{sn}\left(u-\frac{K}{2}\right)\mathrm{sn}\left(u+\frac{K}{2}\right) &= (1+k')\frac{\mathrm{sn}^2 u-(1+k')^{-1}}{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2 u}\\ &= -\frac{1-(1+k')\,\mathrm{sn}^2 u}{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2 u}\end{aligned}$$

□

Weitere ausgewählte Formeln für cn und dn sind:

$$\begin{aligned}\mathrm{cn}(u+a)\,\mathrm{cn}(u-a) &= \frac{\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 a-k'^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a}\\ \mathrm{dn}(u+a)\,\mathrm{dn}(u-a) &= \frac{\mathrm{dn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 a+k^2k'^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a}\,.\end{aligned}$$

C.3.8. Doppelte Argumente

Die Gleichungen für doppelte Argumente ergeben sich direkt aus den Additionstheoremen, wenn man $u = v$ setzt.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn} 2u &= \frac{2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u} \\
\operatorname{cn} 2u &= \frac{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u} \\
\operatorname{dn} 2u &= \frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}
\end{aligned} \tag{C.51}$$

Statt des jeweils gleichen Ausdrucks im Nenner dieser Formeln findet man in der Literatur auch häufig die äquivalenten Darstellungen

$$1-k^2\operatorname{sn}^4 u = \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u = \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{sn}^2 u,$$

welche sich durch Einsetzen der Definitionsgleichungen C.31 und C.32 relativ einfach auf $1-k^2\operatorname{sn}^4 u$ reduzieren lassen.

Weitere bekannte Relationen für doppelte Argumente sind nach [AS72, 16.18.5]

$$\frac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u} = \left(\frac{k\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right)^2 \tag{C.52}$$

$$\frac{1-\operatorname{sn} 2u}{1+\operatorname{sn} 2u} = \left(\frac{\operatorname{cn} u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}\right)^2 . \tag{C.53}$$

C.3.9. Halbe Argumente

Die Gleichungen für halbe Argumente sind aus dem Gleichungssystem für doppelte Argumente ableitbar, wenn man u durch $u/2$ ersetzt und entsprechend umstellt [Tri48, III, § 3].

$$\operatorname{sn}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{dn}u}} \tag{C.54}$$

$$\operatorname{cn}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u+\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{dn}u}} \tag{C.55}$$

$$\operatorname{dn}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u+k^2\operatorname{cn}u+k'^2}{1+\operatorname{dn}u}} \tag{C.56}$$

C.3.10. Imaginäre Argumente

Ausgehend von den grundlegenden Definitionsgleichungen des elliptischen Sinus'

$$u = \mathrm{F}(\varphi; k), \qquad \varphi = \operatorname{am}(u; k), \qquad \operatorname{sn}(u; k) = \sin\varphi$$

sowie den Beziehungen C.18 und C.19 zur imaginären Transformation des elliptischen Integrals $\mathrm{F}(\varphi; k)$ kann man für ein imaginäres Argument $u = \mathrm{j}v$ schreiben:

$$u = \mathrm{F}(\varphi; k) = \mathrm{F}(\mathrm{j}\xi; k) = \mathrm{j}\,\mathrm{F}\left[\arctan(\sinh\xi); k'\right] = \mathrm{j}v\,.$$

Ausgehend von der Zusammenfassung

$$v = \mathrm{F}\left[\arctan(\sinh\xi); k'\right] = \mathrm{F}(\theta; k'), \qquad \theta = \operatorname{am}(v; k'), \qquad \operatorname{sn}(v; k') = \sin\theta$$

ist Jacobi's imaginäre Transformation für den elliptischen Sinus nun auf direktem Wege zu gewinnen [Jac29, § 19].

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(\mathrm{j}v; k) &= \operatorname{sn}(u; k) = \sin\varphi \\ &= \mathrm{j}\tan\theta = \mathrm{j}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mathrm{j}\frac{\operatorname{sn}(v; k')}{\operatorname{cn}(v; k')}\end{aligned}$$

$$\mathrm{sn}(\mathrm{j}v;\, k) = \mathrm{j}\,\mathrm{sc}(v;\, k') \tag{C.57}$$

Interessant ist daran vor allem zu erkennen, daß $\mathrm{sn}(u;\, k)$ zusätzlich zur reellen Periode $2\omega = 4\mathrm{K}(k)$ auch eine imaginäre Periode von $2\omega' = 2\mathrm{K}(k')$ besitzt, d. h. es handelt sich um eine doppelt-periodische Funktion mit dem Periodenpaar $(4K, 2K')$.

Eine ähnliche Transformationsbeziehung kann man mit Hilfe der Verschiebungsrelation $\mathrm{dn}(v + \mathrm{K} + \mathrm{j}\,\mathrm{K}';\, k) = \mathrm{j}k'\mathrm{sc}(u;\, k)$ angeben (siehe Tabelle C.3).

$$\mathrm{sn}(\mathrm{j}v;\, k) = \frac{1}{k}\mathrm{dn}(v + \mathrm{K}' + \mathrm{j}\,\mathrm{K};\, k')$$

Offensichtlich hat $\mathrm{sn}(u;\, k)$ imaginäre Pole $\underset{\times}{u}_{\upsilon}$, die genau dort liegen wo $\mathrm{cn}(v;\, k')$ verschwindet.[15]

$$\underset{\times}{u}_{\upsilon} = \mathrm{j}(2\upsilon + 1)\mathrm{K}', \qquad \upsilon \in \mathbb{Z} \tag{C.58}$$

Für cn ist diese Transformation ausgehend von Gleichung C.31 recht schnell abzuleiten.

$$\begin{aligned} \mathrm{cn}(\mathrm{j}v;\, k) &= \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(\mathrm{j}v;\, k)} \\ &= \sqrt{1 + \mathrm{sc}^2(v;\, k')} \\ &= \frac{1}{\mathrm{cn}(v;\, k')} = \mathrm{nc}(v;\, k') \end{aligned} \tag{C.59}$$

Gleichermaßen für die elliptische Delta-Amplitude $\mathrm{dn}(\mathrm{j}v;\, k)$.

$$\mathrm{dn}(\mathrm{j}v;\, k) = \mathrm{dc}(v;\, k')\,. \tag{C.60}$$

Beweis. Ausgehend von der Definitionsgleichung C.32 für $\mathrm{dn}(v;\, k)$ gilt:

[15] Eine grundsätzliche Einführung in die doppelt-periodischen (elliptischen) Funktionen kann man z. B. in [WW27, XX], [Tri48, I] und [Cay76] nachlesen. Insbesondere sind dort auch verallgemeinerte Aussagen zur Anzahl und Lage der Pol- und Nullstellen sowie den Residuen (Satz von Liouville) enthalten.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dn}(\mathrm{j}v;\,k) &= \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(\mathrm{j}v;\,k)} \\
&= \sqrt{1-k^2\mathrm{j}^2\frac{\mathrm{sn}^2(v;\,k')}{\mathrm{cn}^2(v;\,k')}} \\
&= \sqrt{\frac{\mathrm{cn}^2(v;\,k')+k^2\mathrm{sn}^2(v;\,k')}{\mathrm{cn}^2(v;\,k')}} \\
&= \frac{\sqrt{1-k'^2\mathrm{sn}^2(v;\,k')}}{\mathrm{cn}(v;\,k')} \\
&= \frac{\mathrm{dn}(v;\,k')}{\mathrm{cn}(v;\,k')} = \mathrm{dc}(v;\,k')\,.
\end{aligned}
$$

□

Abschließend noch (ohne Beweis) die anderen elliptischen Funktionen für imaginäre Argumente.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sc}(\mathrm{j}v;\,k) &= \mathrm{jsn}(v;\,k') & \mathrm{sd}(\mathrm{j}v;\,k) &= \mathrm{jsd}(v;\,k') & \mathrm{ns}(\mathrm{j}v;\,k) &= -\mathrm{jcs}(v;\,k') \\
\mathrm{cs}(\mathrm{j}v;\,k) &= -\mathrm{jns}(v;\,k') & \mathrm{cd}(\mathrm{j}v;\,k) &= \mathrm{nd}(v;\,k') & \mathrm{nc}(\mathrm{j}v;\,k) &= \mathrm{nc}(v;\,k') \\
\mathrm{ds}(\mathrm{j}v;\,k) &= -\mathrm{jds}(v;\,k') & \mathrm{dc}(\mathrm{j}v;\,k) &= \mathrm{dn}(v;\,k') & \mathrm{nd}(\mathrm{j}v;\,k) &= \mathrm{cd}(v;\,k')
\end{aligned}
$$

Bemerkenswert ist, daß alle Jacobi'schen elliptischen Funktionen sowohl für imaginäre als auch reelle Argumente immer periodisch sind.[16]

C.3.11. Komplexe Argumente

Die Gleichungen für komplexe Argumente ergeben sich relativ einfach aus den Additionstheoremen C.40, C.45, C.46 und den Formeln C.57, C.59, C.60 für rein imaginäre Argumente. Am Beispiel der elliptischen Delta-Amplitude soll dies kurz dargestellt werden.

[16] Im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, die immer nur für die eine oder andere Art von Argumenten diese Eigenschaft aufweisen.

$$\begin{aligned}\mathrm{dn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k) &= \frac{\mathrm{dn}(\alpha;k)\mathrm{dn}(\mathrm{j}\beta;k)-k^2\mathrm{sn}(\alpha;k)\mathrm{cn}(\alpha;k)\mathrm{sn}(\mathrm{j}\beta;k)\mathrm{cn}(\mathrm{j}\beta;k)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha;k)\mathrm{sn}^2(\mathrm{j}\beta;k)}\\ &= \frac{\mathrm{dn}(\alpha;k)\mathrm{dc}(\beta;k')-k^2\mathrm{sn}(\alpha;k)\mathrm{cn}(\alpha;k)\mathrm{jsc}(\beta;k')\mathrm{nc}(\beta;k')}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\alpha;k)\mathrm{jsc}^2(\beta;k')}\end{aligned}$$

$$\mathrm{dn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k) = \frac{\mathrm{dn}(\alpha;k)\mathrm{cn}(\beta;k')\mathrm{dn}(\beta;k')-\mathrm{j}k^2\mathrm{sn}(\alpha;k)\mathrm{cn}(\alpha;k)\mathrm{sn}(\beta;k')}{\mathrm{cn}^2(\beta;k')+k^2\mathrm{sn}^2(\alpha;k)\mathrm{sn}^2(\beta;k')} \tag{C.61}$$

Die Formeln für die zwei anderen elliptischen Basisfunktionen können in gleicher Art und Weise gewonnen werden.[17]

$$\mathrm{sn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k) = \frac{\mathrm{sn}(\alpha;k)\mathrm{dn}(\beta;k')+\mathrm{j}\mathrm{cn}(\alpha;k)\mathrm{dn}(\alpha;k)\mathrm{sn}(\beta;k')\mathrm{cn}(\beta;k')}{\mathrm{cn}^2(\beta;k')+k^2\mathrm{sn}^2(\alpha;k)\mathrm{sn}^2(\beta;k')} \tag{C.62}$$

$$\mathrm{cn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k) = \frac{\mathrm{cn}(\alpha;k)\mathrm{cn}(\beta;k')-\mathrm{j}\mathrm{sn}(\alpha;k)\mathrm{sn}(\beta;k')\mathrm{dn}(\alpha;k)\mathrm{dn}(\beta;k')}{\mathrm{cn}^2(\beta;k')+k^2\mathrm{sn}^2(\alpha;k)\mathrm{sn}^2(\beta;k')} \tag{C.63}$$

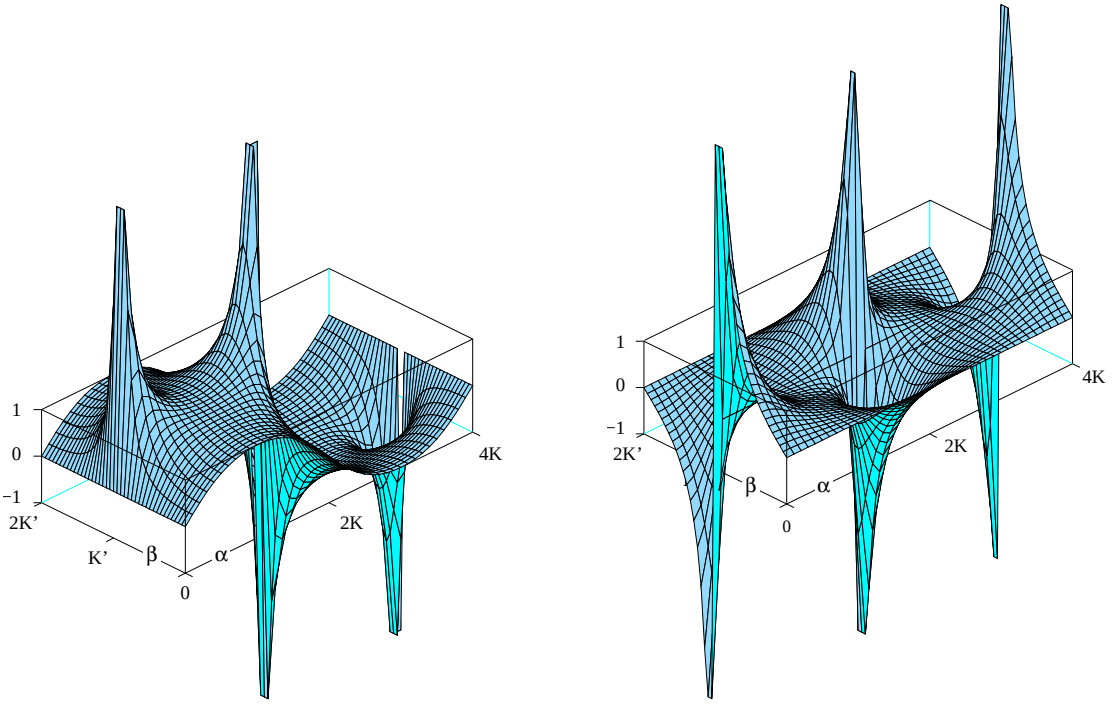
Zur Veranschaulichung dieser Erkenntnisse sind in den Abbildungen C.6 und C.7 die von Real- und Imaginärteil aufgespannten Flächen grafisch dargestellt.[18]

Aus Zähler und Nenner in den Beziehungen C.62, C.63 sowie C.61 kann man direkt auf die entsprechenden Pole und Nullstellen der elliptischen Basisfunktionen schließen. Tabelle C.1 gibt einen Überblick zu deren Lage, wobei immer $\gamma,\delta\in\mathbb{Z}$ gelten soll.

In der Transformationstheorie der Jacobi'schen elliptischen Funktionen (siehe Abschnitt C.4) sind insbesondere die Werte auf dem Gitter $\gamma K+\mathrm{j}\delta K'$ interessant. Hervorzuheben sind dabei die folgenden Beziehungen:

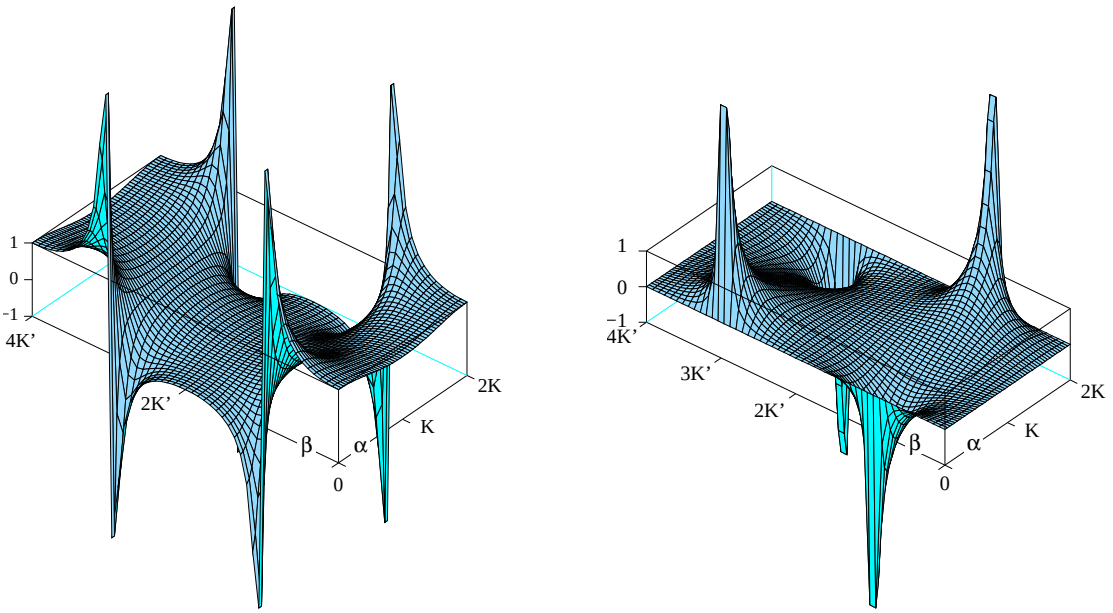
[17] Wobei der allen gemeinsame Nenner $\mathrm{cn}^2(\beta;k')+k^2\mathrm{sn}^2(\alpha;k)\cdot\mathrm{sn}^2(\beta;k')$ auch als $1-k^2\mathrm{sn}^2(\beta;k')\cdot\mathrm{cn}^2(\alpha;k)$ dargestellt werden kann.

[18] Sehr schöne Darstellungen (inklusive der des elliptischen Cosinus') sind auch in [JE52, VI, Abb. 49 ff.] zu finden.



(a) Realteil (b) Imaginärteil

Abbildung C.6.: Eine Periode des elliptischen Sinus' $\mathrm{sn}(\alpha + \mathrm{j}\beta; k)$



(a) Realteil (b) Imaginärteil

Abbildung C.7.: Eine Periode der elliptischen Delta-Amplitude $\mathrm{dn}(\alpha + \mathrm{j}\beta; k)$

Tabelle C.1.: Pole und Nullstellen der elliptischen Basisfunktionen

Funktion	Nullstellen	Pole
$\mathrm{sn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k)$	$2\gamma\mathrm{K}+2\mathrm{j}\delta\mathrm{K}'$	$2\gamma\mathrm{K}+\mathrm{j}(2\delta+1)\mathrm{K}'$
$\mathrm{cn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k)$	$(2\gamma+1)\mathrm{K}+2\mathrm{j}\delta\mathrm{K}'$, $2\gamma\mathrm{K}+\mathrm{j}(2\delta+1)\mathrm{K}'$	$2\gamma\mathrm{K}+\mathrm{j}(2\delta+1)\mathrm{K}'$
$\mathrm{dn}(\alpha+\mathrm{j}\beta;k)$	$(2\gamma+1)\mathrm{K}+\mathrm{j}(2\delta+1)\mathrm{K}'$	$2\gamma\mathrm{K}+\mathrm{j}(2\delta+1)\mathrm{K}'$

$$\mathrm{sn}(K+\mathrm{j}u;k)=\mathrm{nd}(u;k') \tag{C.64}$$

Beweis. Aus Gleichung C.62 ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(K+\mathrm{j}u;k)&=\frac{\mathrm{dn}(u;k')}{\mathrm{cn}^2(u;k')+k^2\mathrm{sn}^2(u;k')}\\&=\frac{\mathrm{dn}(u;k')}{1-k'^2\mathrm{sn}^2(u;k')}\\&=\frac{1}{\mathrm{dn}(u;k')}=\mathrm{nd}(u;k')\end{aligned}$$

□

$$\mathrm{sn}(u+\mathrm{j}K';k)=k^{-1}\mathrm{ns}(u;k) \tag{C.65}$$

Beweis. Es handelt sich hierbei um einen weiteren Trivialfall von Gleichung C.62 mit $\mathrm{cn}(\beta;k')=0$ und $\mathrm{sn}(\beta;k')=1$.

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(u+\mathrm{j}K';k)&=\frac{\mathrm{sn}(u;k)\mathrm{dn}(K';k')}{k^2\mathrm{sn}^2(u;k)\mathrm{sn}^2(K';k')}\\&=\frac{\mathrm{sn}(u;k)}{k\mathrm{sn}^2(u;k)}\\&=\frac{1}{k\mathrm{sn}(u;k)}=k^{-1}\mathrm{ns}(u;k)\end{aligned}$$

□

Insbesondere ergibt sich hieraus

$$\mathrm{sn}(K + \mathrm{j}K'; k) = k^{-1} \tag{C.66}$$

und somit für das unvollständige elliptische Integral an der Stelle $x = k^{-1}$ bezüglich Definitionsgleichung C.5

$$\mathrm{F}\left(\tfrac{1}{k}; k\right) = K + \mathrm{j}K' \ .$$

$$\mathrm{sn}(u + K + \mathrm{j}K'; k) = k^{-1}\mathrm{nc}(u; k) \tag{C.67}$$

Beweis. Dieser Fall ergibt sich aus dem vorherigen, indem man $u := u + K$ setzt.

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(u + K + \mathrm{j}K'; k) &= \frac{1}{k\mathrm{sn}(u + K; k)} \\ &= \frac{1}{k\mathrm{cn}(u; k)}\end{aligned}$$

□

$$\mathrm{dn}(u + K + \mathrm{j}K'; k) = \mathrm{j}k' \tan\varphi \tag{C.68}$$

Beweis. Aus dem Additionstheorem C.61 kann man sofort ableiten

$$\begin{aligned}\mathrm{dn}(u + K + \mathrm{j}K'; k) &= \mathrm{j}k'\mathrm{sc}(u; k) \\ &= \mathrm{j}k' \frac{\mathrm{sn}(u; k)}{\mathrm{cn}(u; k)}\end{aligned}$$

und dann mittels Definitionsgleichung C.30 den Nachweis abschließen.

Tabelle C.2.: Elliptischer Sinus auf dem Gitter $\eta\mathrm{K}+\mathrm{j}\zeta\mathrm{K}'$

η	ζ	u	$\mathrm{sn}(\eta\mathrm{K}+\mathrm{j}\zeta\mathrm{K}'+u;k)$
gerade	gerade	imaginär ($u=\mathrm{j}v$)	$\mathrm{j}(-1)^{\eta/2}\mathrm{sc}(v;k')$
ungerade	gerade	imaginär ($u=\mathrm{j}v$)	$(-1)^{\eta/2}\mathrm{nd}(v;k')$
gerade	gerade	reell	$(-1)^{\eta/2}\mathrm{sn}(u;k)$
gerade	ungerade	reell	$(-1)^{\eta/2}k^{-1}\mathrm{ns}(u;k)$

$$\mathrm{dn}(u+K+\mathrm{j}K';k)=\mathrm{j}k'\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\mathrm{j}k'\tan\varphi$$

□

In Tabelle C.2 sind die (insbesondere für die elliptischen Modultransformationen, vgl. Abschnitt C.4) interessanten Beziehungen für den elliptischen Sinus zusammengefaßt.

C.3.12. Änderung des Arguments

In diesem Abschnitt sollen noch einige Formeln für den Übergang auf andere Argumente genannt (und teilweise auch abgeleitet) werden. Eine komprimierte Übersicht zu den interessanten Fällen enthält Tabelle C.3, eine vollständige Tabellierung für alle elliptischen Funktionen ist in [AS72, 16.8] zu finden.

Alle Formeln in Tabelle C.3 ergeben sich direkt aus den Additionstheoremen C.40, C.45 und C.46 sowie den Gleichungen für komplexe Argumente, wenn man jeweils die um K bzw. K' verschobenen Argumente betrachtet. Aus den Beziehungen in Tabelle C.3 für die gilt $\mathrm{sn}(u+2\omega)=\mathrm{sn}\,u$ (beispielhaft für sn), ist sofort die reelle, imaginäre und komplexe Periode der elliptischen Basisfunktionen ersichtlich (siehe Tabelle C.4 sowie Abbildungen C.6 und C.7).

Folgende spezielle (komplexe) Werte ergeben sich außerdem aus verschiedenen Fällen in Tabelle C.3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(\mathrm{j}K';k)&=\infty & \mathrm{cn}(\mathrm{j}K';k)&=-\mathrm{j}\infty & \mathrm{dn}(\mathrm{j}K';k)&=-\mathrm{j}\infty\\
\mathrm{sn}(\mathrm{j}2K';k)&=0 & \mathrm{cn}(\mathrm{j}2K';k)&=-1 & \mathrm{dn}(\mathrm{j}2K';k)&=-1\\
\mathrm{sn}(K+\mathrm{j}K';k)&=\frac{1}{k} & \mathrm{cn}(K+\mathrm{j}K';k)&=-\mathrm{j}\frac{k'}{k} & \mathrm{dn}(K+\mathrm{j}K';k)&=0\\
\mathrm{sn}(2K+2\mathrm{j}K';k)&=0 & \mathrm{cn}(2K+2\mathrm{j}K';k)&=1 & \mathrm{dn}(2K+2\mathrm{j}K';k)&=-1
\end{aligned}$$

Tabelle C.3.: Elliptische Funktionen bei Änderung des Arguments

$v =$	$\mathrm{sn}(v;k)$	$\mathrm{cn}(v;k)$	$\mathrm{dn}(v;k)$
$-u$	$-\mathrm{sn}(u;k)$	$\mathrm{cn}(u;k)$	$\mathrm{dn}(u;k)$
$u+K$	$\frac{\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$	$-k'\frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$	$\frac{k'}{\mathrm{dn}(u;k)}$
$u-K$	$-\frac{\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$	$k'\frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$	$\frac{k'}{\mathrm{dn}(u;k)}$
$K-u$	$\frac{\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$	$k'\frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$	$\frac{k'}{\mathrm{dn}(u;k)}$
$u+2K$	$-\mathrm{sn}(u;k)$	$-\mathrm{cn}(u;k)$	$\mathrm{dn}(u;k)$
$u-2K$	$-\mathrm{sn}(u;k)$	$-\mathrm{cn}(u;k)$	$\mathrm{dn}(u;k)$
$2K-u$	$\mathrm{sn}(u;k)$	$-\mathrm{cn}(u;k)$	$\mathrm{dn}(u;k)$
$u+\mathrm{j}K'$	$\frac{1}{k\mathrm{sn}(u;k)}$	$-\mathrm{j}\frac{\mathrm{dn}(u;k)}{k\mathrm{sn}(u;k)}$	$-\mathrm{j}\frac{\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{sn}(u;k)}$
$u+2\mathrm{j}K'$	$\mathrm{sn}(u;k)$	$-\mathrm{cn}(u;k)$	$-\mathrm{dn}(u;k)$
$u+K+\mathrm{j}K'$	$\frac{\mathrm{dn}(u;k)}{k\mathrm{cn}(u;k)}$	$-\mathrm{j}\frac{k'}{k\mathrm{cn}(u;k)}$	$\mathrm{j}k'\frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\mathrm{cn}(u;k)}$
$u+2K+2\mathrm{j}K'$	$-\mathrm{sn}(u;k)$	$\mathrm{cn}(u;k)$	$-\mathrm{dn}(u;k)$
$u+4K+4\mathrm{j}K'$	$\mathrm{sn}(u;k)$	$\mathrm{cn}(u;k)$	$\mathrm{dn}(u;k)$

Tabelle C.4.: Perioden der elliptischen Basisfunktionen [AS72, 16.2]

Funktion	Reelle	Imaginäre	Komplexe
	Periode		
sn	$4K$	$2\mathrm{j}K'$	$4K+\mathrm{j}4K'$
cn	$4K$	$4\mathrm{j}K'$	$2K+\mathrm{j}2K'$
dn	$2K$	$4\mathrm{j}K'$	$4K+\mathrm{j}4K'$

C.4. Modultransformationen

C.4.1. Einführung

Die Transformationstheorie der Jacobi'schen elliptischen Funktionen und Integrale befaßt sich mit den rationalen, algebraischen Lösungen $y = f(x; k)$ der Differentialgleichung

$$\frac{M\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,. \tag{C.69}$$

Wie noch zu sehen sein wird, ist dieses Problem eng verknüpft mit der Transformation der Jacobi'schen elliptischen Funktionen auf solche Module ($k \to \lambda$, $k' \to \lambda'$), die zu ganzzahligen Übersetzungen der Periodenverhältnisse führen ($\omega/\omega' \to \Omega/\Omega'$).

Die hier bevorzugte Betrachtungsweise ist (wie auch in [Jac29, § 20]) vor allem analytisch, da sie dem Leserkreis vertrauter sein dürfte. Wegen der Vielzahl der existierenden Transformationsformeln ist als praktische Referenz die tabellarische Zusammenfassung in [Ach70] empfehlenswert.

C.4.2. Problemstellung

Wie schon erwähnt ist es besonders Differentialgleichung C.69, welche bezüglich der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen eine zentrale Rolle spielt. Ihre äquivalente Schreibweise in der Legendre'schen Normalform[19] ergibt sich, wenn man wieder die Substitutionen $x = \sin\varphi$ und $y = \sin\theta$ anwendet zu

$$\frac{M\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{C.70}$$

[19] Für $k = \lambda = 0$ entspricht Gleichung C.69 genau der Differentialgleichung, welche von den Tschebyscheff'schen Funktionen erster Art erfüllt wird.

wobei M der sogenannte Multiplikator[20] und λ sowie k die Module sind.[21]

Es gilt also, eine Substitution $\theta = \Psi(\varphi; k)$ zu finden, welche diese Äquivalenz erfüllt [Cay76, § 219], [Ach70, § 34], [Tod84, § 5].[22] Man kann das Problem auch so formulieren: Gesucht sind die Integrale bzw. Lösungsfunktionen $y = f(x; k)$ der gewöhnlichen (impliziten) Differentialgleichung C.69 erster Ordnung:[23]

$$\begin{aligned} \frac{M\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ y' &= \frac{1}{M}\sqrt{\frac{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ M^2y'^2(1-x^2)(1-k^2x^2)-(1-y^2)(1-\lambda^2y^2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{C.71}$$

Das Finden der Integralkurve $y = f(x; k)$ ist (wie so oft) nicht einfach, hat man aber zwei Transformationsfunktionen f und g gefunden, dann kann man durch aufeinanderfolgende Anwendung der entsprechenden Beziehungen auch mindestens eine dritte Transformation angeben.

$$\begin{aligned} \frac{M\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, & y &= f(x; k) \\ \frac{L\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2z^2)}} &= \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}, & z &= g(y; \lambda) \\ \frac{ML\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\gamma^2z^2)}} &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, & z &= g(f(x; k); \lambda) \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung wird sofort ersichtlich, daß der zugehörige Multiplikator das Produkt der beiden anderen Multiplikatoren M und L ist. Das Modul γ ist aus der Abhängigkeit von λ bekannt und kann durch die Beziehung $\lambda = \rho(k)$ auch als Funktion von k ausgedrückt werden.

[20] Die Einführung eines Multiplikators ist bei den elliptischen Funktionen nach Jacobi deshalb erforderlich, weil (im Gegensatz zu den Weierstrass'schen Funktionen) reelle und imaginäre Periode nicht unabhängig voneinander sind.

[21] Solange man bei dieser differentiellen Darstellung bleibt, sind die Formeln C.70 und C.69 absolut gleichwertig. Erst beim Übergang zum (vollständigen oder auch unvollständigen) elliptischen Integral gilt es die entsprechenden Integrationsgrenzen zu berücksichtigen.

[22] Es handelt sich anders gesagt um das Auffinden einer Invarianten $\Psi(\varphi)$, welche die elliptische Form des Differentials erhält.

[23] Für φ, θ bedeutet dies $\sin\theta = f(\sin\varphi; k)$ und somit $\Psi(\varphi; k) = \arcsin[f(\sin\varphi; k)]$.

Außerdem enthält jede Transformation nach Formel C.69 auch gleichzeitig eine "Rücktransformation", wenn man die Umkehrfunktion f^{-1} nutzt. Zum besseren Verständnis (und aus Gründen der Lesbarkeit) soll $y_1 = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(x_1)$, $x_1 = y$, $\lambda_1 = k$, $k_1 = \lambda$ gesetzt werden, was $\mathrm{d}y_1 = \mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}y$ bedeutet.

$$\frac{M\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k_1^2x_1^2)}} = \frac{M^{-1}\,\mathrm{d}y_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-\lambda_1^2y_1^2)}}$$

Die Umkehrfunktionen (der Transformationsbeziehung $y_1 = f^{-1}(x_1)$ als auch des Moduls $\lambda_1 = \rho^{-1}(k_1)$) enthalten also prinzipiell eine weitere Transformation, deren Multiplikator M^{-1} ist, wenn man im Sinne der eingeführten Größen die Richtung vertauscht.

C.4.3. Rationale Lösung

Schon C.G.J. Jacobi hat in [Jac29] nachgewiesen, daß Lösungen der Differentialgleichung C.70 algebraische Funktionen der Form $F(x,y) = 0$ sein können [Tri48, IV], [Hur00, II-5, § 4 ff.]. Für die implizite Darstellung solcher Funktionen wiefolgt

$$F(x,y) = p_m(x)y^m + p_{m-1}(x)y^{m-1} + \cdots + p_2(x)y^2 + p_1(x)y + p_0(x), \tag{C.72}$$

wobei $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}, p_m$ Polynome in x sind, kann bekanntermaßen in bestimmten Spezialfällen eine explizite Lösungsformel $y = f(x)$ ermittelt werden. Bei dem gesuchten Integral $f(x)$ handelt es sich in den einfachsten Fällen um eine irrationale ($m = 2$) oder rationale Funktion ($m = 1$), wobei sich Letztere als

$$y = \frac{U(x)}{V(x)} \tag{C.73}$$

mit den Polynomen

$$U(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = a_n \prod_{\nu=1}^{n} (x - \underset{\circ}{x}_\nu)$$
$$V(x) = \sum_{\mu=0}^{n'} b_\mu x^\mu = b_{n'} \prod_{\mu=1}^{n'} (x - \underset{\times}{x}_\mu)$$

darstellen läßt.[24]

Um für diesen Funktionstyp den Nachweis zu erbringen, daß es sich um eine Lösung von Differentialgleichung C.70 handelt, folgen wir [Cay76, § 218 ff.] und setzten zuerst $U = U(x)$ bzw. $V = V(x)$ und bilden dann $\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$ sowie die Ableitung y'.

$$\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)} = \frac{\sqrt{(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2 V^2)}}{V^2}$$
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Dividiert man die Ableitung y' durch $\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$ entsteht der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{U'V - UV'}{\sqrt{(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2 V^2)}}\,\mathrm{d}x \tag{C.74}$$

welcher ja letztlich der rechten Seite von Gleichung C.69 (multipliziert mit M^{-1}) entsprechen soll.

$$\frac{U'V - UV'}{\sqrt{(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2 V^2)}} = \frac{1}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Notwendige Voraussetzung dafür ist zuerst einmal, daß für den Grad der Polynome U und V die Einschränkung $|d| = |n - n'| \leq 1$ gilt, d. h. entweder beide Polynome sind vom Grad n (bzw. n') oder eines ist vom Grade n, das andere aber $n-1$.[25]

[24] Man könnte dies wegen der Ähnlichkeit von Beziehung C.70 mit der Differentialgleichung der Tschebyscheff'schen Funktionen erster Art $(1-x^2)[\mathrm{T}'_n(x)]^2 = n^2\left[1 - \mathrm{T}_n^2(x)\right]$ vermuten, welche als Spezialfall entsteht, wenn $\lambda = k = 0$ gesetzt wird.

[25] Wie auch in [Cay76, § 219] sprechen wir jedoch immer von einer gebrochenen Funktion der Ordnung n.

Beweis. Der Nachweis basiert auf der letzten Gleichung in folgender Darstellung

$$M^2(1-x^2)(1-k^2x^2)(U'V-UV')^2 = (U^2-V^2)(U^2-\lambda^2V^2)$$

und vergleicht einfach den Grad von links- und rechtsseitigem Polynom (mit entsprechender Fallunterscheidung).

$$\begin{aligned} 2(n+n'-1)+4 &= 4\max(n,n') \\ n+n'+1 &= \begin{cases} 2n & (n \geq n') \\ 2n' & (n' > n) \end{cases} \\ \left|n-n'\right| &= 1 \end{aligned} \tag{C.75}$$

Eine Funktion ist also vom Grad n, die andere vom Grad $n-1$ und deshalb die Differenz $d = n-n' = \pm 1$. Allerdings ergeben sich dieselben Verhältnisse auch für $n = n'$ (also $d = 0$), denn in diesem Fall verschwindet der höchstwertige Koeffizient (mit Wert $a_n b_{n'} d$) in $U'V-UV'$. Verringert man entsprechend den linksseitigen Grad in Gleichung C.75 um Eins (auf der rechten Seite bleibt alles wie gehabt), dann wird sofort erkennbar, daß auch $n = n'$ eine Lösungsmöglichkeit ist. □

Nimmt man nun an, daß sich in Gleichung C.74 ein Faktor $(x-c)^2$ vom Ausdruck $(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2V^2)$ abspalten läßt, dann ist der Term $x-c$ in $U'V-UV'$ ebenfalls als Faktor enthalten.

Beweis. Ist $(x-c)^2$ ein Faktor (c eine doppelte Nullstelle) von U^2-V^2 oder $U^2-\lambda^2V^2$, dann ist $(x-c)^2$ auch ein Faktor von $U-V$ oder $U+V$ bzw. $U-\lambda V$ oder $U+\lambda V$. Betrachten wir im weiteren nur den Fall, daß der Faktor $(x-c)^2$ in $U-V$ enthalten ist (gleiches gilt für die anderen Fälle). Es ergeben sich dann die Darstellungen

$$\begin{aligned} U^2-V^2 &= (x-c)^2Q(x) = (U-V)(U+V) \\ U-V &= (x-c)^2P(x) \end{aligned}$$

mit den Ableitungen nach x

$$U' - V' = 2(x-c)P(x) + (x-c)^2 P'(x) = (x-c)\left[2P(x) + (x-c)P'(x)\right]$$
$$2U'U - 2V'V = 2(x-c)Q(x) + (x-c)^2 Q'(x) = (x-c)\left[2Q(x) + (x-c)Q'(x)\right] .$$

Bildet man jetzt

$$\begin{aligned} U'V - UV' &= (U'-V')(U+V) - (UU'-VV') \\ &= (U+V)(x-c)\left[2P(x) + (x-c)P'(x)\right] - (x-c)\left[Q(x) + \frac{x-c}{2}Q'(x)\right] \end{aligned}$$

dann bestätigt das gemeinsame Vorkommen des Faktors $x-c$ in allen Summanden unsere Annahme. □

Setzt man eine solche Abspaltung für alle $2n-2$ Wurzeln von $U'V - UV'$ fort, dann bleibt in $(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2V^2)$, dessen Grad ja $4n$ ist, ein Produktterm vom Grad 4 übrig, der nicht mehr gekürzt werden kann. Mit den konstanten Koeffizienten d_i ergibt sich demzufolge die Darstellung:[26]

$$\begin{aligned} U'V - UV' &= C \prod_{l=1}^{2(n-1)} (x - c_l) = C \cdot T(x) \\ (U^2-V^2)(U^2-\lambda^2V^2) &= (d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0) \prod_{l=1}^{2(n-1)} (x-c_l)^2 \\ &= (d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0)T^2(x) . \end{aligned}$$

Kehrt man mit diesen Formeln zurück zur Ausgangsgleichung C.74

[26] Mit der nicht einschränkenden Annahme, daß der Leitkoeffizient des Polynoms $U'V - UV'$ genau Eins ist.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} &= \frac{C\cdot T(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(d_4x^4+d_3x^3+d_2x^2+d_1x+d_0)T^2(x)}}\\ &= \frac{C\,\mathrm{d}x}{\sqrt{d_4x^4+d_3x^3+d_2x^2+d_1x+d_0}}\end{aligned}$$

und berücksichtigt außerdem, daß eine Überführung des besagten Produktterms in die Form $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ immer möglich ist (siehe [Tri48, II, § 3], [WW27, § 20·54, §20·6]), dann ist mit einer rationalen Polynomfunktion $y = f(x)$ die elliptische Transformation nach Gleichung C.70 möglich.[27] Aus dieser Feststellung heraus kann man bezüglich der Bestimmung der Koeffizienten von U und V noch die Bedingung

$$(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2V^2) = (1-x^2)(1-k^2x^2)T^2(x)$$

formulieren.

C.4.4. Elliptische Lösung

Eine auf elliptischen Funktionen basierende Lösung der Differentialgleichung C.70 ist ermittelbar, wenn man zu einer Parameterdarstellung mit Hilfe der neuen Variablen u übergeht.[28]

$$\frac{M\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{d}u$$

Integriert man nun beide Seiten und nimmt die Definitionsgleichung C.29 der Amplitudenfunktion des elliptischen Sinus' (Gleichung C.30) hinzu, so ergibt sich für x

[27] Man kann auch argumentieren, daß $U(x)$ und $V(x)$ so gewählt sein müssen, daß der verbleibende Produktterm genau der Legendre-Form $(1-x^2)(1-k^2x^2)$ und insofern dem Modul k entspricht.

[28] Offen bleibt natürlich noch die Bestimmung des Multiplikators M und des Moduls λ.

$$u = \mathrm{F}(\varphi; k) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} \tag{C.76}$$

$$\varphi = \mathrm{am}(u; k)$$

$$x = \sin\varphi = \mathrm{sn}(u; k)\,.$$

In Gleichung C.76 wurde auf die Einführung einer Integrationskonstante verzichtet, da man ohne wesentliche Einschränkung vom Funktionswert $u = 0$ für $\varphi = 0$ ausgehen kann.

Für y erhält man in gleicher Art und Weise

$$u = M \int_0^{\theta} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} - C = M\,\mathrm{F}(\theta; \lambda) - C \tag{C.77}$$

$$\theta = \mathrm{am}\left(\tfrac{u-C}{M}; \lambda\right)$$

$$y = \sin\theta = \mathrm{sn}\left(\tfrac{u+C}{M}; \lambda\right),$$

wobei diesmal eine Integrationskonstante C berücksichtigt werden muß.

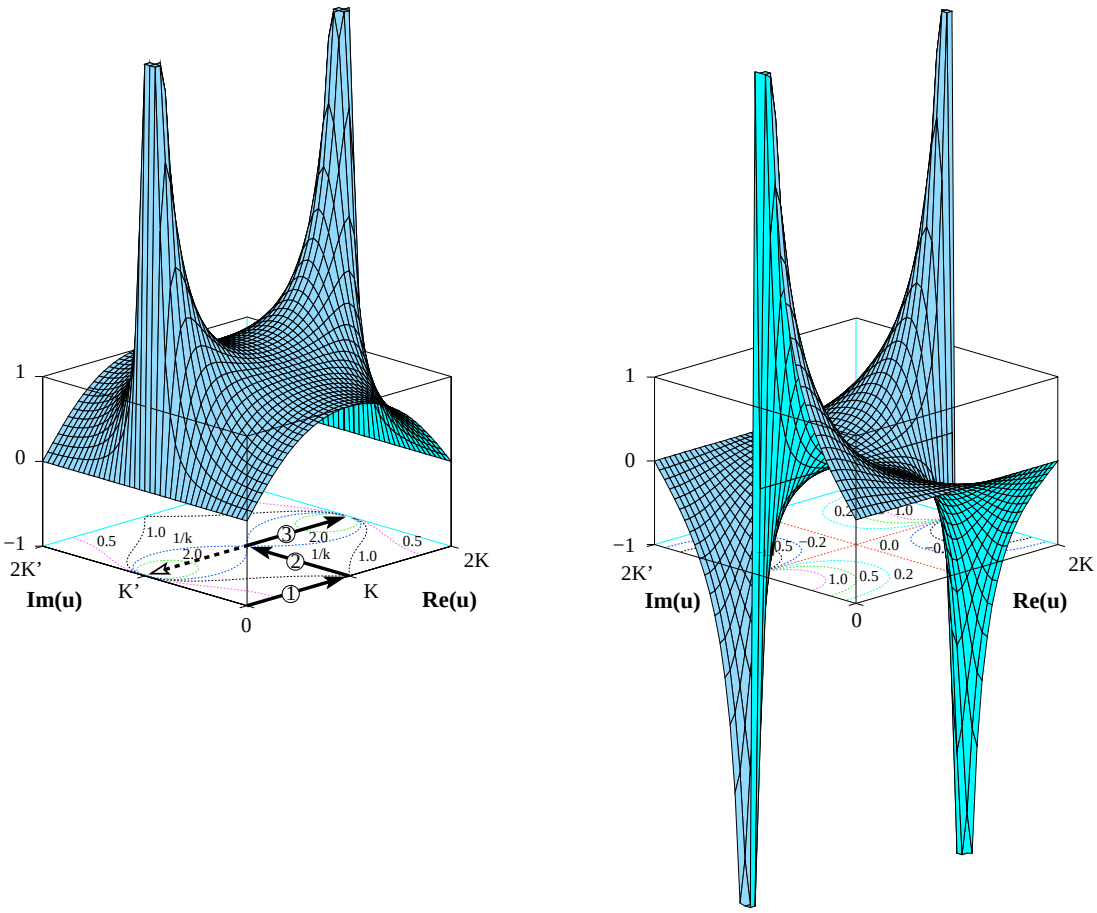
Fragt man sich nun, welche Werte der Parameter u grundsätzlich annehmen darf, damit x reell wird, dann ist ein Blick auf Abbildung C.8 hilfreich. Sie zeigt nocheinmal den Verlauf von sn für komplexe Argumente, wobei die zusätzlichen Parameterlinien anschaulich illustrieren,[29] daß x nur entlang der Geraden $u + \mathrm{j}\beta K'$ für reelles u und $u + \alpha K$ für imaginäres u nicht komplex ist ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$).

Mit diesem Wissen kann man bezüglich x den mit Pfeilen markierten "Wertepfad" in Abbildung C.8a für das Argument u angeben. Dieser Weg garantiert zwar, daß x monoton Werte zwischen 0 und ∞ annimmt, jedoch sind weitere x-Werte möglich, wenn man die Periodizität des elliptischen Sinus' berücksichtigt.

Soll auch y (oder zumindest y^2) reell sein,[30] dann muß sich $u + C$ auf dem Gitter $\gamma M\Lambda + \mathrm{j}\delta M\Lambda'$

[29] Um die weiteren Formeln etwas zu verkürzen sollen ab jetzt die folgenden Kurzschreibweisen vereinbart sein: $K = \mathrm{K}(k)$ sowie $\Lambda = \mathrm{K}(\lambda)$.

[30] Reelle Werte für y sind Voraussetzung für eine rationale Lösung (vgl. Abschnitt C.4.3), rein imaginäre Werte die einer irrationalen Lösung.



(a) Realteil

(b) Imaginärteil

Abbildung C.8.: Elliptischer Sinus $\mathrm{sn}\left[\mathrm{Re}(u) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(u);\, k\right]$ mit Parameterlinien

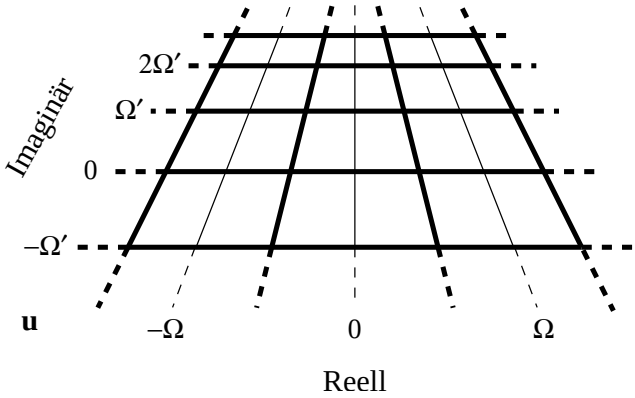


Abbildung C.9.: Gitter rein imaginärer/reeller Werte für y

($\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$) bewegen. Abbildung C.9 illustriert dieses anschaulich, wobei folgende Definitionen für die reelle bzw. imaginäre Periode von x und y gelten sollen:[31]

$$2\omega = 4K \qquad 2\omega' = \mathrm{j}2K'$$
$$2\Omega = 4M\Lambda \qquad 2\Omega' = \mathrm{j}2M\Lambda' \,.$$

Sinnvolle Werte für die Integrationskonstante C sind entsprechend nur $C = 0$ und $C = \pm M\Lambda$, wobei der Wert $\pm M\Lambda$ rein reelle Werte für y bei geradem γ ermöglicht.[32] Auf der Grundlage dieser Betrachtungen, welche ja im Wesen auf der doppelten Periodizität des elliptischen Sinus' basieren, kann man (ohne etwas zu verändern) die Gleichungen C.76 und C.77 auch folgendermaßen schreiben:[33]

$$x = \mathrm{sn}(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega'; k)$$
$$y = \mathrm{sn}\left(\tfrac{u+2\gamma\Omega+2\delta\Omega'-C}{M}; \lambda\right), \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}\,.$$

[31] Die reelle Viertelperiode für x (bezüglich u) ist bekanntlich die des elliptischen Sinus', also K, für y entsprechend $M\Lambda$. Der Multiplikator M wird an dieser Stelle als reell angenommen, im anderen (nicht ausgeschlossenen) Fall wären ω', Ω' reell bzw. ω, Ω imaginär.

[32] Mit anderen Worten werden die ursprünglich rein imaginären Werte für y entlang der dünnen Linien in Abbildung C.9 zu rein reellen Werten (dicke Linien).

[33] Wegen der Symmetrieeigenschaft des elliptischen Sinus' $\mathrm{sn}(u + 2K; k) = -\mathrm{sn}(u; k)$ könnte man diese Beziehungen auch auf die reellen Argumente $u + 2\alpha K$ bzw. $u + 2\gamma M\Lambda'$ reduzieren.

Soll gewährleistet sein, daß nur eine endliche Anzahl möglicher (unterschiedlicher) x-Werte zu einem bestimmten Wert y gehören (sowie umgekehrt),[34] dann muß man ausgehend von diesen Gleichungen die Periodenbedingung

$$u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega' = u + 2\gamma\Omega + 2\delta\Omega'$$
$$2\alpha\omega + \beta\omega' = 2\gamma\Omega + \delta\Omega'$$

formulieren. Separiert man darin Real- und Imaginärteil, dann ergibt sich für den Fall eines reellen Multiplikators M

$$\begin{aligned} \alpha\omega &= \gamma\Omega \\ \beta\omega' &= \delta\Omega' \end{aligned} \tag{C.78}$$

und im einfachsten Fall, d. h. wenn $\alpha = \beta = 1$ gilt

$$\begin{aligned} K &= \gamma M\Lambda, \qquad \gamma \in \mathbb{Z} \\ K' &= \delta M\Lambda', \qquad \delta \in \mathbb{Z} \\ \frac{K}{K'} &= \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda'} \,. \end{aligned} \tag{C.79}$$

Für den Fall eines ganzzahligen Verhältnisses γ/δ bzw. δ/γ, also eines Periodenverhältnisses der Form

$$\frac{K}{K'} = n\frac{\Lambda}{\Lambda'} \qquad \text{oder} \qquad \frac{K'}{K} = n\frac{\Lambda'}{\Lambda}, \tag{C.80}$$

spricht man bezüglich der Beziehung zwischen k und λ von einer Modulgleichung vom Grad n.

Der Spezialfall $\gamma = n$, $\delta = 1$ wird dabei als die 1. elliptische Haupttransformation (n-te Teilung der reellen Periode), der Fall $\gamma = 1$, $\delta = n$ als 2. elliptische Haupttransformation (n-te Teilung der imaginären Periode) bezeichnet.

[34] Im Sinne der Forderung nach einer rationalen Lösungsfunktion entsprechend Gleichung C.72.

C.4.5. Die Transformationsfunktion

Hier sollen nun ausgewählte Eigenschaften der Transformationsfunktion $f(x;k)$ bzw. des Differentials (von Gleichung C.69) ermittelt werden. Die charakteristischen Eigenschaften sollen später dazu dienen, Aussagen zur Form von $f(x;k)$ machen zu können.

Reziproke Argumente Im Zusammenhang mit reziproken Argumenten sei auf folgende bemerkenswerte Eigenschaft von $f(x;k)$ hingewiesen:

$$f\left(\tfrac{1}{kx};k\right) = \frac{1}{\lambda f(x;k)}\,. \tag{C.81}$$

Beweis. Ersetzt man im Ausdruck $\mathrm{d}x/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$ der Gleichung C.69 die Variable x durch $1/kx_1$

$$x = \frac{1}{kx_1}, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}x_1}{kx_1^2},$$

dann ändert sich nur das Vorzeichen der rechten Seite.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= -\frac{k\,\mathrm{d}x_1}{k^2x_1^2\sqrt{(1-k^{-2}x_1^{-2})(1-k^2k^{-2}x_1^{-2})}} \\
&= -\frac{k\,\mathrm{d}x_1}{\sqrt{(k^2x_1^2-1)(k^2x_1^2-k^2)}} \\
&= -\frac{\mathrm{d}x_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}
\end{aligned}$$

Substituiert man nach der gleichen Methode nun auch y durch $1/\lambda y_1$, dann tritt auf der linken Seite ebenfalls (nur) eine Vorzeichenumkehr auf und die Differentialgleichung C.69 ändert sich überhaupt nicht.[35] Folglich sind x_1 und y_1 ebenfalls durch $y_1 = f(x_1;k)$ verbunden und es gilt:

$$y = f\left(\tfrac{1}{kx_1};k\right) = \frac{1}{\lambda y_1} = \frac{1}{\lambda f(x_1;k)},$$

[35] Diese Methode kann sehr günstig zur Bestimmung von λ für eine spezifische Transformation angewandt werden.

Tabelle C.5.: Funktionswerte x, y für $C = 0$

Weg	$\mathrm{Re}(u)$	$\mathrm{Im}(u)$	x	$\pm y$
1	$0 \le \mathrm{Re}(u) \le K$	0	$\mathrm{sn}(u; k)$	$\mathrm{sn}(u/M; \lambda)$
2	K	$0 \le \mathrm{Im}(u) \le K'$	$\mathrm{nd}[\mathrm{Im}(u); k']$	ⓐ $\mathrm{jsc}[\mathrm{Im}(u)/M; \lambda']$ ⓑ $\mathrm{nd}[\mathrm{Im}(u)/M; \lambda']$
3	$K \le \mathrm{Re}(u) \le 2K$	K'	$k^{-1}\,\mathrm{ns}[\mathrm{Re}(u); k]$	ⓐ $\mathrm{sn}(u/M; \lambda)$ ⓑ $\lambda^{-1}\,\mathrm{ns}[\mathrm{Re}(u)/M; \lambda]$

d. h. die Transformationsfunktion f muß die Eigenschaft laut Gleichung C.81 aufweisen. □

Funktionsverlauf Weitere Eigenschaften der Lösungsfunktion ergeben sich aus den Betrachtungen von Abschnitt C.4.3 sowie C.4.4. Dazu sei hier nocheinmal auf Abbildung C.8a verwiesen, welche den Verlauf des Parameters u in der komplexen Ebene zeigt. Sie zeigt den Weg des Parameters u insbesondere für die elliptischen Haupttransformationen ($\gamma = n$, $\delta = 1$ bzw. $\gamma = 1$, $\delta = n$) sehr anschaulich. Für diese Fälle entarten die Gleichungen C.76 und C.77 auf den Wegabschnitten ② und ③ (vgl. Abschnitt C.3.11).

Für den Fall $C = 0$ enthält Tabelle C.5 eine Übersicht in Bezug auf den Verlauf von u nach Abbildung C.8.

Auf Wegabschnitt ② determiniert γ (gerade/ungerade) welche Gleichung für y zutrifft, auf Abschnitt ③ ist es δ. Ist γ bzw. δ gerade, dann trifft jeweils Formel ⓐ zu (irrationale Lösung), im anderen Fall ist es ⓑ (rationale Lösung). Als spezielle Funktionswerte ergeben sich daraus

$$
\begin{aligned}
y &= f(0; k) = 0 \\
y &= f(1; k) = \begin{cases} 0 & (|\gamma| = 0, 2, 4, \ldots) \\ +1 & (|\gamma| = 1, 5, 9, \ldots) \\ -1 & (|\gamma| = 3, 7, 11, \ldots) \end{cases} \quad \begin{cases} ⓐ \\ ⓑ \\ ⓑ \end{cases} .
\end{aligned}
\tag{C.82}
$$

Eine wesentliche Schlußfolgerung der vorangegangenen Ausführungen sowie der Gleichungen in Tabelle C.5 ist die, daß $f(x; k)$ in diesem Fall eine ungerade Funktion sein muß.

Der Fall $C = \pm M\Lambda$ führt zu einer Verschiebung von y entlang der reellen Achse, wodurch $y = f(x; k)$ zu einer geraden Funktion wird. Mit Hilfe der Verschiebungsrelationen nach Tabelle C.3 kann man auch hier eine Übersicht angeben, welche Tabelle C.6 präsentiert. Ist γ bzw. δ gerade, dann trifft jeweils Formel ⓐ zu, im anderen Fall ist es ⓑ.

Tabelle C.6.: Funktionswerte x, y für $C = \Omega/2$

$\mathrm{Re}(u)$	$\mathrm{Im}(u)$	x	$\pm y$
$0 \le \mathrm{Re}(u) \le K$	0	$\mathrm{sn}(u;k)$	$\mathrm{cd}(u/M;\lambda)$
K	$0 \le \mathrm{Im}(u) \le K'$	$\mathrm{nd}(\mathrm{Im}(u);k')$	ⓐ $\mathrm{nd}(\mathrm{Im}(u)/M;\lambda')$ ⓑ $\mathrm{jsc}(\mathrm{Im}(u)/M;\lambda')$
$K \le \mathrm{Re}(u) \le 2K$	K'	$k^{-1}\mathrm{ns}(\mathrm{Re}(u);k)$	ⓐ $\mathrm{cd}(u/M;\lambda)$ ⓑ $\lambda^{-1}\mathrm{dc}(\mathrm{Re}(u)/M;\lambda)$

Als spezielle Funktionswerte ergeben sich hier:

$$
\begin{aligned}
y &= f(0;k) = 1 \\
y &= f(1;k) = \begin{cases} 0 & (|\gamma| = 1,3,5,\ldots) \\ +1 & (|\gamma| = 0,4,8,\ldots) \\ -1 & (|\gamma| = 2,6,10,\ldots) \end{cases} \quad \begin{cases} ⓑ \\ ⓐ \\ ⓐ \end{cases} .
\end{aligned}
\tag{C.83}
$$

Rationale Lösungen Mit den soeben gewonnen Erkenntnissen kann man die rationale Lösung nach Formel C.73 konkretisieren.

$$
y = \begin{cases} x\dfrac{u(x^2)}{v(x^2)} & (C = 0\,;\ \gamma \text{ ungerade}) \\ \dfrac{u(x^2)}{v(x^2)} & (C = M\Lambda\,;\ \gamma \text{ gerade}) \end{cases}
\tag{C.84}
$$

Herangezogen wurden dazu all die Fälle, welche in den Tabellen C.6 und C.5 rein reelle Funktionsverläufe erzeugen, also

- γ ungerade für $C = 0$ (ungerade Funktion)
- und γ gerade für $C = M\Lambda$ (gerade Funktion).

Nun soll noch nachgewiesen werden, daß die Koeffizienten a_ν und b_μ der Polynome $U(x)$ und $V(x)$ der rationalen Lösung nach Gleichung C.73 nicht unabhängig voneinander, sondern durch folgenden Relation verbunden sind.

$$
\begin{aligned}
\underset{\times}{x}_\mu &= \frac{1}{k\underset{\circ}{x}_\nu} \\
\underset{\circ}{x}_\nu \underset{\times}{x}_\mu &= \frac{1}{k}
\end{aligned}
\tag{C.85}
$$

Beweis. Um diese Beziehung einfach zu begründen soll unser Augenmerk der Linearfaktordarstellung von $U(x)$ und $V(x)$ mittels der Polstellen $\underset{\times}{x}$ und Nullstellen $\underset{\circ}{x}$ gelten. Im ersten Schritt wird dazu $f(1/kx; k)$ gebildet.

$$
\begin{aligned}
f\left(\tfrac{1}{kx}; k\right) &= \frac{a_n \prod\limits_{\nu=1}^{n} \left[(kx)^{-1} - \underset{\circ}{x}_\nu\right]}{b_{n'} \prod\limits_{\mu=1}^{n'} \left[(kx)^{-1} - \underset{\times}{x}_\mu\right]} \\
&= (kx)^{-d} \frac{a_n \prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 - k\underset{\circ}{x}_\nu x)}{b_{n'} \prod\limits_{\mu=1}^{n'} (1 - k\underset{\times}{x}_\mu x)}
\end{aligned}
$$

Nach Gleichung C.81 und wegen $\underset{\circ}{x}_{n-1} = 0$ muß nun gelten

$$
\begin{aligned}
f\left(\tfrac{1}{kx}; k\right) &= \frac{1}{\lambda f(x; k)} \\
(kx)^{-d} \frac{a_n \prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 - k\underset{\circ}{x}_\nu x)}{b_{n'} \prod\limits_{\mu=1}^{n'} (1 - k\underset{\times}{x}_\mu x)} &= \frac{b_{n'} \prod\limits_{\mu=1}^{n'} (x - \underset{\times}{x}_\mu)}{\lambda a_n \prod\limits_{\nu=1}^{n} (x - \underset{\circ}{x}_\nu)} \,.
\end{aligned}
\tag{C.86}
$$

Setzt man im Zähler die speziellen Werte $x = k^{-1}\underset{\circ}{x}_\nu^{-1}$, dann müssen sowohl links- als auch rechtsseitiger Ausdruck verschwinden.[36]

[36] Für den Nenner kann man eine äquivalente Bedingung $x = 1/k\underset{\times}{x}_\mu$ wählen, die aber zum gleichen Ergebnis führt.

$$x - \underset{\times}{x}_\mu = 0$$
$$\underset{\times}{x}_\mu = \frac{1}{k\underset{\circ}{x}_\nu}$$

Sind die Pole $\underset{\times}{x}_\mu$ aber schon durch die Nullstellen $\underset{\circ}{x}_\nu$ determiniert, dann hängen auch die Koeffizienten b_μ von a_ν ab. □

Aus Gleichung C.86 kann man, wenn andere spezielle Werte wie z. B. $x = 1$ eingesetzt werden, auch das Modul λ bestimmt werden.

$$\lambda = k^d \frac{b_{n'}}{a_n} \sqrt{\frac{\prod_{\mu=1}^{n'} (1 - \underset{\times}{x}_\mu)(1 - k\underset{\times}{x}_\mu)}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - \underset{\circ}{x}_\nu)(1 - k\underset{\circ}{x}_\nu)}}$$

C.4.6. Transformationen erster Ordnung

Eine tabellarische Übersicht der Transformationen erster Ordnung sowie der geeigneten Substitutionen ist unter anderem in [Tri48, lV, § 2] zu finden. Wir beschränken uns hier auf zwei wichtige Transformationen – Jacobi's reelle sowie imaginäre Transformation.

C.4.6.1. Imaginäre Transformation

Die imaginäre Transformation wurde in Bezug auf das elliptische Integral erster Art schon in Abschnitt C.2.1, für den elliptischen Sinus in Abschnitt C.3.10 behandelt. Um die Parameter M und λ aus der allgemeinen Gleichung C.70 zu ermitteln, ist ein Blick auf Beziehung C.18 notwendig.

$$\mathrm{F}(\varphi; k) = \mathrm{j}\,\mathrm{F}[\arctan(\sinh \mathrm{j}\varphi); k']$$

Diese Gleichung ist nun der folgenden speziellen Ausprägung von Differentialgleichung C.70

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}} \tag{C.87}$$

mit der Substitution nach Gleichung C.19

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan[\sinh(\mathrm{j}\varphi)] \\ &= \mathrm{j}\,\mathrm{artanh}(\sin\varphi) && \text{(C.88)} \\ \varphi &= -\mathrm{j}\,\mathrm{arsinh}(\tan\theta) && \text{(C.89)}\end{aligned}$$

äquivalent. Aus der spezifischen Beziehung C.87 kann man durch Vergleich mit Differentialgleichung C.70 sofort den Multiplikator und die zugeordnete Modulgleichung (vom Grad Eins) ablesen.

$$M = \mathrm{j}, \qquad \lambda = k' \qquad (\lambda' = k)$$

Die Bestimmung des Periodenverhältnisses ist mit diesen Werten kein Problem mehr.

$$\frac{K}{K'} = \frac{\mathrm{K}(k)}{\mathrm{K}(k')} = \frac{\mathrm{K}(\lambda')}{\mathrm{K}(\lambda)} = \frac{\Lambda'}{\Lambda} \tag{C.90}$$

Die rationale Beziehung zwischen x und y ist schon in der Substitution C.19 enthalten, wenn man (wie immer) Gleichung C.76 sowie C.77 berücksichtigt.

$$\begin{aligned}\sin\varphi = \mathrm{j}\tan\theta &= \mathrm{j}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \\ x &= \mathrm{j}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \\ y &= \mathrm{j}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

C.4.6.2. Reelle Transformation

Jacobi's reelle Transformation nach folgender Gleichung

$$\operatorname{sn}(u;k) = \frac{1}{k}\operatorname{sn}\left(ku;\tfrac{1}{k}\right) \tag{C.91}$$

ermöglicht es, bei allen elliptischen Funktionen auch Module $k > 1$ zuzulassen.

Beweis. Ausgehend vom Argument des Integrals $\mathrm{F}(\varphi;k)$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

nimmt man die Substitution $\sin\theta = k\sin\varphi$, welche ja eine algebraische Beziehung erster Ordnung, nämlich $y = kx$ verkörpert, vor. Mit der Ableitung $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\varphi = k\cos\varphi/\cos\theta$ erhält man wieder die typische Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} &= \frac{1}{k}\cdot\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\varphi\sqrt{1-\sin^2\theta}}\\ &= \frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\varphi}\\ &= \frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^{-2}\sin^2\theta}}\end{aligned} \tag{C.92}$$

aus welcher nur noch die Parameter M und λ konform zu Gleichung C.70 abgelesen werden müssen. □

$$M = \frac{1}{k}, \qquad \lambda = \frac{1}{k}$$

Beweis. Mit den allgemeinen Beziehungen C.76 und C.77 sowie der vorgenommenen Substitution $\sin\varphi = k^{-1}\sin\theta$ ist der abschließende Beweis möglich.

$$\operatorname{sn}(u;k) = \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{k} = \frac{1}{k}\operatorname{sn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{1}{k}\operatorname{sn}\left(ku;\tfrac{1}{k}\right)$$

□

C.4.7. Quadratische Transformationen

Quadratische Transformationen sind durch eine Modulgleichung vom Grad $n = 2$ bestimmt,[37] also durch Periodenverhältnisse wie z. B.

$$\frac{K}{K'} = 2\frac{\Lambda}{\Lambda'}\,. \tag{C.93}$$

C.4.7.1. Landen-Transformation

Die Landen-Transformation ist wahrscheinlich der bekannteste Vertreter aller quadratischen Transformationen [AS72, 17.5], [WW27, § 22·42], [Ach70, § 38], [Cay76, § 254], [Tri48, IV, § 7], [Hur00, II-7, § 5]. Sie ist gekennzeichnet durch die "Periodenbeziehungen"

$$K = 2M\Lambda, \qquad \mathrm{j}K' = \mathrm{j}M\Lambda' \tag{C.94}$$

welche eine Teilung der ersten (also reellen) Periode durch zwei anzeigen.[38]

Transformationsbeziehung Die mit Gleichung C.94 verbundenen Transformationsbeziehungen sind:[39]

[37] Eine schöne tabellarische Übersicht aller 18 quadratischen Transformationen in ihrer Standardform ist in [Cay76, § 252, § 478 ff.] zu finden.

[38] Deshalb wird diese Transformation auch als reelle Multiplikation der Periodenverhältnisse bezeichnet.

[39] Ein sehr eleganter Beweis von Formel C.95 mit Hilfe der Theta-Funktionen ist in [WW27] zu finden. Auch eine geometrische Interpretation der Transformationsbeziehung C.95 ist möglich, vgl. [Tri48, IV, § 7], [Cay76, § 420].

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{(1+k')\,\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{cn}(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)} \tag{C.95}$$

$$\lambda = \frac{1-k'}{1+k'} < k \tag{C.96}$$

$$M = \frac{1}{1+k'}\,. \tag{C.97}$$

Beweis. Beschränkt man sich auf die Periodenrechtecke um den Koordinatenursprung dann liegen die Nullstellen von $\mathrm{sn}(u/M;\lambda)$ bekanntlich bei $\underset{\circ}{u} = 0, \pm 2M\Lambda$, was nach den Periodenverhältnissen laut Gleichung C.94 äquivalent zu $\underset{\circ}{u} = 0, \pm K$ ist. Demzufolge liegen die Nullstellen bezüglich x bei $\underset{\circ}{x} = 0, \pm 1$. In gleicher Art und Weise ergibt sich für die Pole $\underset{\times}{u} = 2M\Lambda \pm \mathrm{j}M\Lambda' = K \pm \mathrm{j}K'$ und entsprechend für x

$$\underset{\times}{x} = \mathrm{sn}(K \pm \mathrm{j}K';k) = \frac{1}{k}\,.$$

In Bezug auf den allgemeinen Lösungsansatzes muß es sich für $y = f(x;k)$ also um eine Beziehung der Form

$$y^2 = A^2x^2\frac{1-x^2}{1-k^2x^2} \tag{C.98}$$

handeln. Um nun die Werte für den Multiplikator M, das Modul λ sowie A zu bestimmen ist es günstig in beiden Lösungsansätzen das Verhältnis y/x zu bilden und dann gleichzusetzen.

$$A\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}} = \frac{\mathrm{sn}(u/M;\lambda)}{\mathrm{sn}(u;k)} \tag{C.99}$$

Setzt man nun noch die drei ausgewählten Werte $u = K/2$, $u = 0$ und $u = \mathrm{j}K'$ ein, dann sind die (ebenfalls drei) Unbekannten leicht zu bestimmen. □

1. An der Stelle $u = K/2 = M\Lambda$ nimmt nach Gleichung C.38 der elliptische Sinus (und dem-

zufolge auch x) den Wert $(1+k')^{-1/2}$ an und es gilt

$$A\sqrt{\frac{k'}{1+k'-k^2}} = \sqrt{1+k'}$$
$$A = 1+k'.$$

a) Setzt man nun den Wert $u = 0$ und folglich auch $x = 0$ in Gleichung C.99 ein, dann wird wegen der Unbestimmtheit des rechtsseitigen Ausdrucks eine Grenzwertbestimmung nach der Regel von Bernoulli-l'Hospital notwendig.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sn}(u/M;\lambda)}{\mathrm{sn}(u;k)} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sn}'(u/M;\lambda)}{\mathrm{sn}'(u;k)} \\ &= \frac{1}{M}\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{cn}(u/M;\lambda)\,\mathrm{dn}(u/M;\lambda)}{\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)} \\ &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

b) Den dritten Wert $u = \mathrm{j}K' = \mathrm{j}M\Lambda'$ kann man beim rechtsseitigen Grenzübergang auf den vorhergehenden Fall zurückführen, wenn $\mathrm{sn}(u+\mathrm{j}K';k) = k^{-1}\mathrm{ns}(u;k)$ bzw. $\mathrm{sn}(u/M+\mathrm{j}\Lambda';\lambda) = \lambda^{-1}\mathrm{ns}(u/M;\lambda)$ nach Tabelle C.3 beachtet wird. Um auch den linksseitigen Grenzwert ermitteln zu können, sind vorbereitend noch Zähler und Nenner durch x zu dividieren.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} A\sqrt{\frac{x^{-2}-1}{x^{-2}-k^2}} &= \lim_{u\to \mathrm{j}K'}\frac{\mathrm{sn}(u/M;\lambda)}{\mathrm{sn}(u;k)} \\ \frac{1}{kM} &= \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sn}(u+\mathrm{j}\Lambda';\lambda)}{\mathrm{sn}(u+\mathrm{j}K';k)} \\ kM &= \frac{\lambda}{k}\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sn}(u/M;\lambda)}{\mathrm{sn}(u;k)} \\ kM &= \frac{\lambda}{kM} \\ \lambda &= k^2M^2 = \frac{(1-k')(1+k')}{(1+k')^2} = \frac{1-k'}{1+k'} \end{aligned}$$

Eine weitere interessante Darstellung der Transformationsbeziehung ist möglich, wenn man die Verschiebungsrelation $\mathrm{sn}(u+K;k) = \mathrm{cd}(u;k)$ zu Hilfe nimmt.

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = (1+k')\mathrm{sn}(u;k)\,\mathrm{sn}(u+K;k)$$

In äquivalenter Art und Weise kann auch die folgende Formel abgeleitet werden, wenn man die Periodenbeziehungen C.94 der Landen-Transformation berücksichtigt.

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M}-\Lambda;\lambda)\,\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = -\left[(1+k')\mathrm{sn}\left(u+\tfrac{K}{2};k\right)\mathrm{sn}\left(u-\tfrac{K}{2};k\right)\right]^2$$

Funktionsverlauf Der Verlauf der Transformationsbeziehung $y = f(x;k)$ entsprechend Gleichung C.98

$$y = (1+k')x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}. \tag{C.100}$$

ist in Abbildung C.10 grafisch dargestellt.

Im Gegensatz dazu zeigen die einzelnen Bilder in Abbildung C.11 die äquivalente Parameterdarstellung nach Gleichung C.76 und C.77. Der Parameter u läuft wieder auf dem Wegabschnitt ① in Abbildung C.8a von 0 nach K, dann auf dem Teilstück ② bis $K+\mathrm{j}K'$ und zuletzt bis zum Punkt $2K+\mathrm{j}K'$ (bzw. rückwärts nach $\mathrm{j}K'$).

Das Modul λ Um eine Vorstellung vom Verlauf der Modulgleichung $\lambda = \rho(k)$ zu bekommen, wurde Formel C.96 in Abbildung C.12 grafisch dargestellt.[40]

Aus der Modulbeziehung C.96 können außerdem die folgenden nützlichen Vertauschungsrelationen abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} 1+k' &= 1+\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{2}{1+\lambda} \\ 1+\lambda &= \frac{2}{1+k'} \end{aligned} \tag{C.101}$$

[40] Wegen $k > \lambda$ wird diese Darstellung auch als *aufsteigende* Landen-Transformation bezeichnet (das Modul auf der rechten Seite der Gleichung ist größer als das auf der linken). Aus der Definitionsgleichung C.1 des komplementären Moduls ergibt sich folgerichtig $\lambda' > k'$.

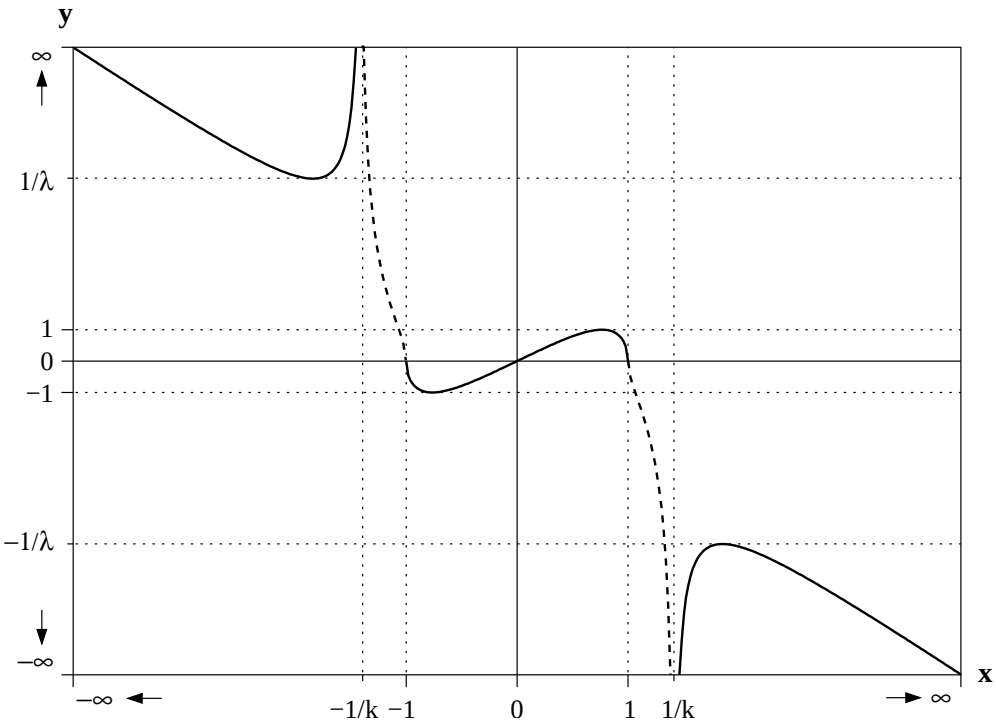
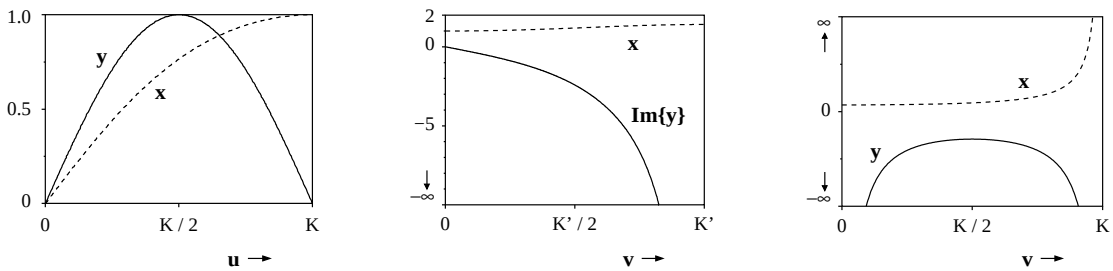


Abbildung C.10.: Lösung der LANDEN-Transformation $y = f(x; k)$



(a) $0 \le u \le K$ (b) $u = K + \mathrm{j}v$ (c) $u = K + \mathrm{j}K' + v$

Abbildung C.11.: LANDEN-Transformation in Parameterdarstellung

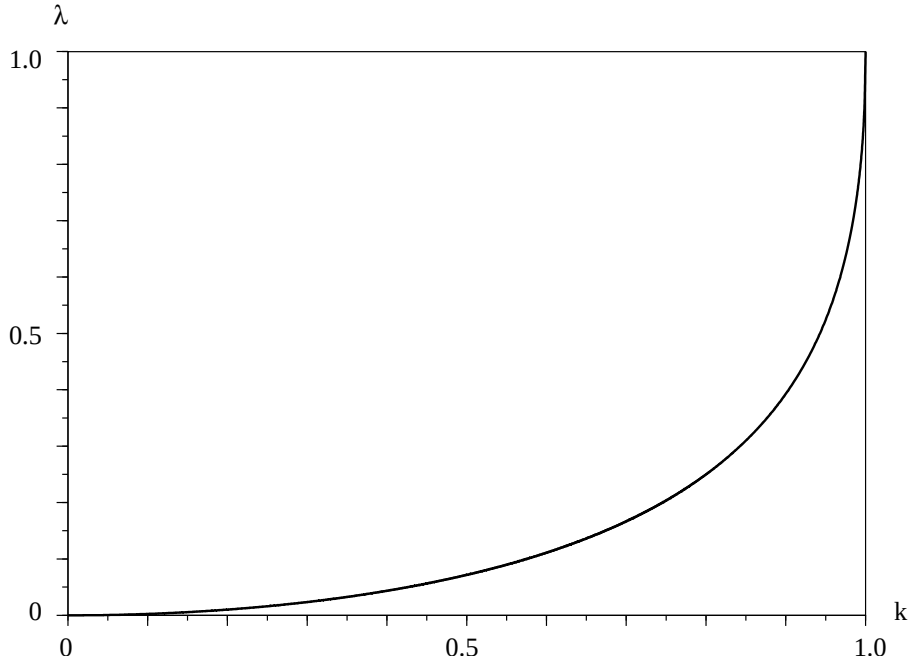


Abbildung C.12.: Modultransformation $\lambda = \dfrac{1-k'}{1+k'}$

Gebräuchliche Darstellungen für das Modul k sind außerdem

$$
\begin{aligned}
k^2 &= 1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{(1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2} \\
k^2 &= \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} = \lambda(1+k')^2 \\
k &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} = (1+k')\sqrt{\lambda}
\end{aligned}
\tag{C.102}
$$

die wegen der Symmetrie von Formel C.96 äquivalent auch für λ' gelten.

$$
\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} = (1+\lambda)\sqrt{k'} \tag{C.103}
$$

Eine weitere nützliche Formel für λ ist die folgende

$$
\lambda = \left(\frac{k}{1+k'}\right)^2 = \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2,
$$

die sich aus der Multiplikation von Gleichung C.96 mit $1+k'$ bzw. $1-k'$ unter Berücksichtigung der Definition des komplementären Moduls in Formel C.1 ergibt.

Beziehungen für cn Die Transformationsbeziehung für $\mathrm{cn}(u/M;\lambda)$ lautet

$$\mathrm{cn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{1-(1+k')\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}\,. \tag{C.104}$$

Beweis. Ausgangspunkt soll Definitionsgleichung C.31 sowie die Landen-Transformation des elliptischen Sinus' in Formel C.95 sein. Nach Kombination beider Gleichungen multipliziert man zuerst alle Terme aus, extrahiert danach $(1+k')\mathrm{sn}^2(u;k)$ und vereinfacht abschließend durch Anwendung des binomischen Satzes.

$$\begin{aligned}
\mathrm{cn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda) &= 1-\mathrm{sn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda)\\
&= \frac{\mathrm{dn}^2(u;k)-(1+k')^2\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{cn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}^2(u;k)}\\
&= \frac{1-(1+k')(1-k')\mathrm{sn}^2(u;k)-(1+k')^2\mathrm{sn}^2(u;k)+(1+k')^2\mathrm{sn}^4(u;k)}{\mathrm{dn}^2(u;k)}\\
&= \frac{1-2(1+k')\mathrm{sn}^2(u;k)+(1+k')^2\mathrm{sn}^4(u;k)}{\mathrm{dn}^2(u;k)}\\
&= \frac{[1-(1+k')\mathrm{sn}(u;k)]^2}{\mathrm{dn}^2(u;k)}
\end{aligned}$$

□

Beziehungen für dn Die Beziehung für dn kann ebenfalls ausgehend von der des elliptischen Sinus' in Gleichung C.95 und mit Hilfe seiner Definitionsgleichung C.32 ermittelt werden.

$$\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{1-(1-k')\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)} \tag{C.105}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda) &= 1-\lambda^2\mathrm{sn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda)\\
&= 1-\lambda^2(1+k')^2\frac{\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{cn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}^2(u;k)}\\
&= \frac{\mathrm{dn}^2(u;k)-(1-k')^2\mathrm{sn}^2(u;k)\,\mathrm{cn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}^2(u;k)}\\
&= \frac{1-k^2\mathrm{sn}^2(u;k)-(1-k')^2\mathrm{sn}^2(u;k)\left[1-\mathrm{sn}^2(u;k)\right]}{\mathrm{dn}^2(u;k)}
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren sowie nachfolgende Anwendung des Binomischen Satzes führt zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda) &= \frac{1-2(1-k')\mathrm{sn}^2(u;k)+(1-k')^2\mathrm{sn}^4(u;k)}{\mathrm{dn}^2(u;k)}\\
&= \frac{\left[1-(1-k')\mathrm{sn}^2(u;k)\right]^2}{\mathrm{dn}^2(u;k)}.
\end{aligned}$$

□

Die weitere Umformung der rechten Seite von Gleichung C.105 kann jetzt noch so erfolgen, daß sie einzig und allein auf $\mathrm{dn}(u;k)$ basiert.

$$\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{1}{1+k'}\cdot\frac{k'+\mathrm{dn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\lambda)+(1+\lambda)\mathrm{dn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}$$

Beweis. Für den Beweis verwendet man am einfachsten Definitionsgleichung C.32 und Hilfsformel C.2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M};\lambda) &= \frac{1-(1-k')\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}\\
&= \frac{1+k'-\left[1-\mathrm{dn}^2(u;k)\right]}{(1+k')\mathrm{dn}(u;k)}\\
&= \frac{1}{1+k'}\cdot\frac{k'+\mathrm{dn}^2(u;k)}{\mathrm{dn}(u;k)}
\end{aligned}$$

□

Trigonometrische Beziehungen Bezüglich Differentialgleichung C.70 ist die LANDEN-Transformation durch die Substitution

$$\sin\theta = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{C.106}$$

gekennzeichnet. Mit der Beziehung für doppelte Winkel $\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi$ ist äquivalent dazu

$$\sin\theta = \frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Aus Gleichung C.104 ergibt sich folgerichtig für den Cosinus

$$\cos\theta = \frac{1-(1+k')\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\cos^2\varphi - k'\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{C.107}$$

und mit dem Theorem $\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$ sowie der Modulbeziehung C.96

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-k'+(1+k')\cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{\lambda+\cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Insbesondere für numerische Berechnungen hat der trigonometrische Tangens Bedeutung. Die entsprechenden Beziehungen können direkt aus Formel C.95 sowie C.104 gewonnen werden.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi - k'\sin^2\varphi} = \frac{(1+k')\tan\varphi}{1-k'\tan^2\varphi} \tag{C.108}$$

Eine weitere oft verwendete Darstellungsvariante auf der Grundlage des Tangens ist

$$\tan(\theta-\varphi) = k'\tan\varphi\,. \tag{C.109}$$

Beweis. Ausmultiplizieren von Gleichung C.108 gefolgt von Umstellen nach $k'\tan\varphi$ ergibt

$$
\begin{aligned}
(1-k'\tan^2\varphi)\tan\theta &= (1+k')\tan\varphi \\
\tan\theta - k'\tan\theta\tan^2\varphi &= \tan\varphi + k'\tan\varphi \\
\tan\theta - \tan\varphi &= k'\tan\varphi(1+\tan\theta\tan\varphi) \\
k'\tan\varphi &= \frac{\tan\theta-\tan\varphi}{1+\tan\theta\tan\varphi}.
\end{aligned}
$$

Mit dem Additionstheorem $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ kann man nach $\tan(\theta-\varphi)$ auflösen.

$$\tan(\theta-\varphi) = k'\tan\varphi.$$

□

Eine ebenfalls oft zu findende Darstellung mit Hilfe des trigonometrischen Sinus' lautet:

$$
\begin{aligned}
\sin(2\varphi-\theta) &= \lambda\sin\theta \qquad \text{(C.110)} \\
\sin\left[\varphi-(\theta-\varphi)\right] &= \lambda\sin\left[\varphi+(\theta-\varphi)\right]\ .
\end{aligned}
$$

Beweis. Sie kann aus Gleichung C.109 abgeleitet werden, wenn man die trigonometrische Produktformel $\sin\alpha\cos\beta = 1/2\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$ anwendet.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\cos(\theta-\varphi)} &= k'\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \\
\sin(\theta-\varphi)\cos\varphi &= k'\cos(\theta-\varphi)\sin\varphi \\
\sin\theta-\sin(2\varphi-\theta) &= k'\sin\theta + k'\sin(2\varphi-\theta) \\
(1+k')\sin(2\varphi-\theta) &= (1-k')\sin\theta \\
\sin(2\varphi-\theta) &= \frac{1-k'}{1+k'}\sin\theta
\end{aligned}
$$

□

Beziehungen für $\mathrm{F}(\varphi; k)$ Aus den allgemeinen Transformationsbeziehungen C.77 und C.76 sowie Formel C.97 resultiert sofort folgende Darstellung

$$u = \mathrm{F}(\varphi; k) = M\,\mathrm{F}(\theta; \lambda) \tag{C.111}$$

$$\mathrm{F}(\theta; \lambda) = (1 + k')\mathrm{F}(\varphi; k)\,. \tag{C.112}$$

C.4.7.2. Gauss-Transformation

Die Gauss-Transformation realisiert im Gegensatz zur Landen-Transformation (welche die reelle Periode teilt) eine Division der imaginären Periode durch zwei [Ach70, § 39], [Cay76, § 246]. Sie wird in vielen Literaturquellen durch folgende Gleichungen beschrieben.

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M}; \lambda) = \frac{(1+k)\,\mathrm{sn}(u; k)}{1 + k\,\mathrm{sn}^2(u; k)} \tag{C.113}$$

$$M = \frac{1}{1+k} \tag{C.114}$$

$$\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \tag{C.115}$$

Es ist nun relativ einfach die Gauss-Transformation mit Hilfe der elliptischen Funktionen direkt aus der Landen-Transformation abzuleiten.[41]

Beweis. Nimmt man als Ausgangspunkt Gleichung C.95 der Landen-Transformation und ersetzt $\mathrm{sn}(u; k)\mathrm{cd}(u; k)$ mit Hilfe von Gleichung C.52, dann ergibt sich

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M}; \lambda) = \frac{1+k'}{k}\sqrt{\frac{1 - \mathrm{dn}(2u; k)}{1 + \mathrm{dn}(2u; k)}}\,.$$

[41] Häufig wird diese Transformation deshalb auch als *absteigende* Landen-Transformation bezeichnet.

Quadrieren und Umstellen nach $\mathrm{dn}(2u;k)$ führt zu einer ersten recht bekannten Gleichung der Gauss-Transformation.

$$\begin{aligned}
\lambda\mathrm{sn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda)[1+\mathrm{dn}(2u;k)] &= 1-\mathrm{dn}(2u;k)\\
\mathrm{dn}(2u;k)\left[1+\lambda\mathrm{sn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda)\right] &= 1-\lambda\mathrm{sn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda)\\
\mathrm{dn}(2u;k) &= \frac{1-\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)}{1+\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)} \qquad \text{(C.116)}
\end{aligned}$$

Will man die Beziehungen für den elliptischen Sinus ermitteln, dann ist auf der linken Seite noch $\mathrm{sn}(2u;k)$ zu extrahieren. Dazu verwendet man am am einfachsten Definitionsgleichung C.32 der Delta-Amplitude sowie Hilfsformel C.102.

$$\begin{aligned}
1-k^2\mathrm{sn}^2(2u;k) &= \left[\frac{1-\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)}{1+\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)}\right]^2\\
k^2\mathrm{sn}^2(2u;k) &= \frac{\left[1+\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)\right]^2-\left[1-\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)\right]^2}{\left[1+\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)\right]^2}\\
k^2\mathrm{sn}^2(2u;k) &= \frac{4\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)}{\left[1+\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)\right]^2}\\
\mathrm{sn}(2u;k) &= \frac{(1+\lambda)\mathrm{sn}(u/M;\lambda)}{1+\lambda\mathrm{sn}^2(u/M;\lambda)}
\end{aligned}$$

Nimmt man zuletzt noch die Ersetzungen

$$\begin{aligned}
u_g &= \frac{u}{M}\\
\frac{u_g}{M_g} &= 2u\\
\lambda_g &= k \qquad (\Lambda_g = K)\\
k_g &= \lambda \qquad (K_g = \Lambda)
\end{aligned}$$

vor und bezieht die Transformationsbeziehungen C.95, C.97, und C.96 mit ein, dann erhält man

die Beziehungen der GAUSS-Transformation.[42]

$$
\begin{aligned}
u = u_g M &= \frac{u_g}{2M_g} \\
M_g &= \frac{1}{2M} = \frac{1+k'}{2} = \frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{1+k_g} \\
\lambda_g &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} = \frac{2\sqrt{k_g}}{1+k_g} \\
k_g &= \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\lambda'_g}{1+\lambda'_g}
\end{aligned}
$$

□

Beziehungen für dn Für die Delta-Amplitude dn ergibt sich die Transformationsbeziehung recht einfach aus Zwischenformel C.116, wenn Gleichung C.34 in der Form

$$k^2 \mathrm{sn}^2(u;k) = 1 - \mathrm{dn}^2(u;k)$$

berücksichtigt wird.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M};\lambda) &= \frac{1-k\mathrm{sn}^2(u;k)}{1+k\mathrm{sn}^2(u;k)} \\
&= \frac{k-\left[1-\mathrm{dn}^2(u;k)\right]}{k+\left[1-\mathrm{dn}^2(u;k)\right]}
\end{aligned}
\tag{C.117}
$$

Beziehungen für cn Die noch ausstehende Beziehung für cn lautet

[42] Um die Eindeutigkeit bei der Darstellung der Zusammenhänge mit der LANDEN-Transformation zu wahren, sind alle Größen aus den Formeln der GAUSS-Transformation mit “g” indiziert worden

$$\mathrm{cn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u;k)}\,. \tag{C.118}$$

Trigonometrische Beziehungen Die gesuchte Beziehung für den Sinus erhält man wieder durch direkte Umsetzung von Transformationsbeziehung C.113 mit Hilfe der trigonometrischen Äquivalenzen in Gleichung C.70 sowie C.30.

$$\sin\theta = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}$$

Eine eng mit der Gauss-Form des elliptischen Integrals erster Art (siehe Gleichung C.6) verbundene Darstellung ist immer die über den Tangens. Sie kann aus der vorangegangenen Gleichung sowie dem Äquivalent für den Cosinus nach Formel C.118

$$\cos\theta = \frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+k\sin^2\varphi}$$

gewonnen werden, wenn man dann noch die trigonometrische Beziehung $\sin^2\varphi = \tan^2\varphi/(1+\tan^2\varphi)$ hinzuzieht.

$$\begin{aligned}\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{(1+k)\sin\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\\ &= \frac{(1+k)\tan\varphi}{\sqrt{1-k^2\frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}}}\\ &= (1+k)\tan\varphi\sqrt{\frac{1+\tan^2\varphi}{1+k'^2\tan^2\varphi}}\end{aligned} \tag{C.119}$$

Periodenverhältnis Die Bestimmung des Periodenverhältnisses gestaltet sich ausgehend von den Periodenbeziehungen der Landen-Transformation relativ einfach. Man muß dabei nur Gleichung C.94 auf die mit einem tiefgestellten “g” gekennzeichneten Größen der Gauss-Transformation umsetzen.

$$\Lambda_g = 2MK_g = \frac{K_g}{M_g}$$
$$\mathrm{j}\Lambda'_g = \mathrm{j}MK'_g = \mathrm{j}\frac{K'_g}{2M_g}$$
$$2\frac{K_g}{K'_g} = \frac{\Lambda_g}{\Lambda'_g} \tag{C.120}$$

C.4.8. Erste elliptische Haupttransformation, *n* ungerade

C.4.8.1. Periodenbeziehungen

Charakteristisch für die 1. elliptische Haupttransformation ist, daß die reelle Periode $2\Omega = 4M\Lambda$ von $y = g(u/M; \lambda)$ genau n-mal die reelle Periode $2\omega = 4K$ von $x = \mathrm{sn}(u; k)$ teilt, die imaginären Perioden aber gleich sind (n-te Teilung der ersten Periode,[43] vgl. Fall $\gamma = n$, $\delta = 1$ in Abschnitt C.4.5).

$$K = nM\Lambda \tag{C.121}$$
$$K' = M\Lambda' \tag{C.122}$$

Das sich ergebende Periodenverhältnis

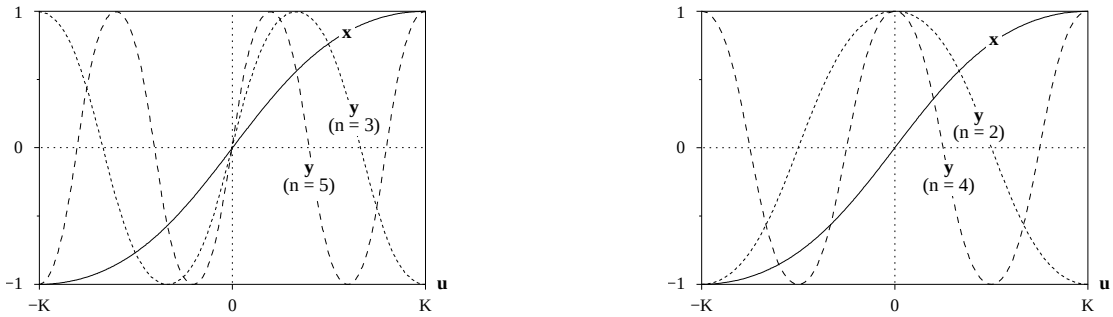
$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K} \tag{C.123}$$

zeigt, daß es sich bei der Beziehung zwischen λ und k um eine Modulgleichung vom Grad n handelt.[44]

Den Verlauf für x und y im Bereich $-K \leq u \leq K$ in Abhängigkeit vom Parameter u zeigt Abbildung C.13.

[43] In der Literatur wird der Begriff der *ersten Periode* sehr häufig anstatt *reelle Periode* verwendet, da er besser der Verallgemeinerung mehrfach-periodischer Funktionen entspricht (siehe z. B. [Koe74]).

[44] Welche der Ungleichung $\lambda < k$ genügt (vgl. Abbildung C.4, in der das Verhältnis K/K' als Funktion des Moduls k dargestellt ist).



(a) n ungerade (b) n gerade

Abbildung C.13.: Verlauf für x und y im Intervall $-K \leq u \leq K$

C.4.8.2. Funktionsverlauf

Für ungerades $\gamma = n$ muß die Integrationskonstante C aus Abschnitt C.4.5 verschwinden, damit y auf Wegabschnitt ② in Abbildung C.8a reell ist.[45]

$$y = \mathrm{sn}(\tfrac{u}{M}; \lambda) \tag{C.124}$$

Der zugeordnete Verlauf des Parameters u ist für diesen Fall nocheinmal anschaulich in Abbildung C.14 illustriert (inklusive der positiven Nullstellen und Pole), wobei fett dargestellte Gitternetzlinien reelle Werte des elliptischen Sinus' kennzeichnen.

Der Funktionsverlauf von $y = f(x; k)$ ist in Abbildung C.15 dargestellt.

Er ist direkt aus dem Gitter in Abbildung C.14 erklärbar, wenn man folgendes bedenkt:

1. Auf Wegabschnitt ① läuft x von 0 nach 1 (u entsprechend von 0 bis K), während y wegen Gleichung C.121 genau n-mal die reelle Viertelperiode des elliptischen Sinus durchläuft und dadurch $(n-1)/2$ Nullstellen erzeugt.[46]

2. Auf Wegabschnitt ② läuft x von 1 bis $1/k$ (siehe auch Tabelle C.5). Da die imaginären (Halb-) Perioden von x und y nach Formel C.122 aber gleich sind, bewegt sich y äquivalent von 1 bis $1/\lambda$.

3. Auf Abschnitt ③ des Weges von u herrschen ähnliche Verhältnis wie auf dem Ersten, nur daß y hier invertiert ist und so wegen Formel C.121 genau $(n-1)/2$ Pole generiert.

[45] Nach Tabelle C.5 gilt auf diesem Teilstück $y = \mathrm{nd}(\mathrm{Im}(u)/M; \lambda')$.
[46] Die Nullstelle bei $x = 0$ nicht mitgezählt.

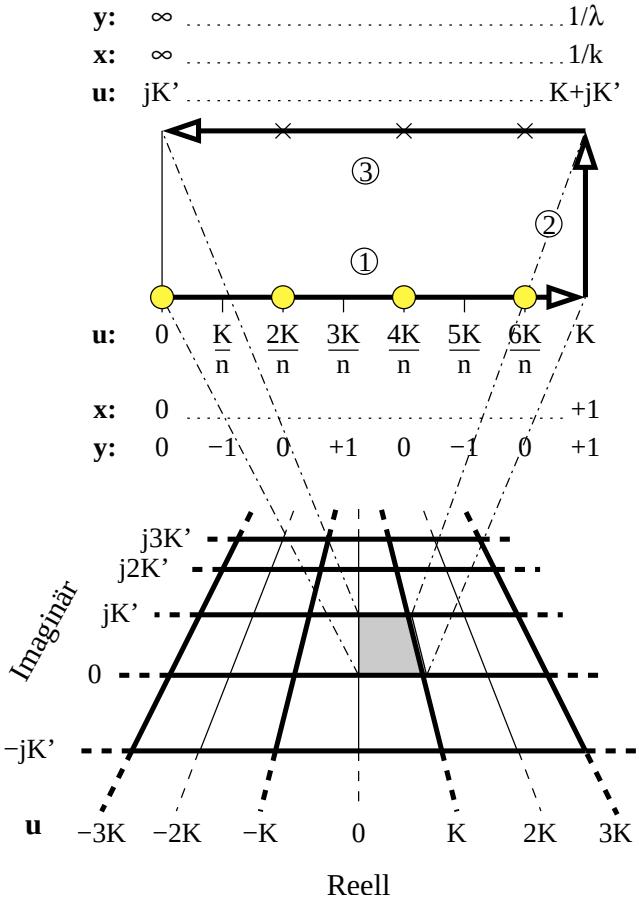


Abbildung C.14.: Verlauf von u in der komplexen Ebene ($n = 7$, ungerade)

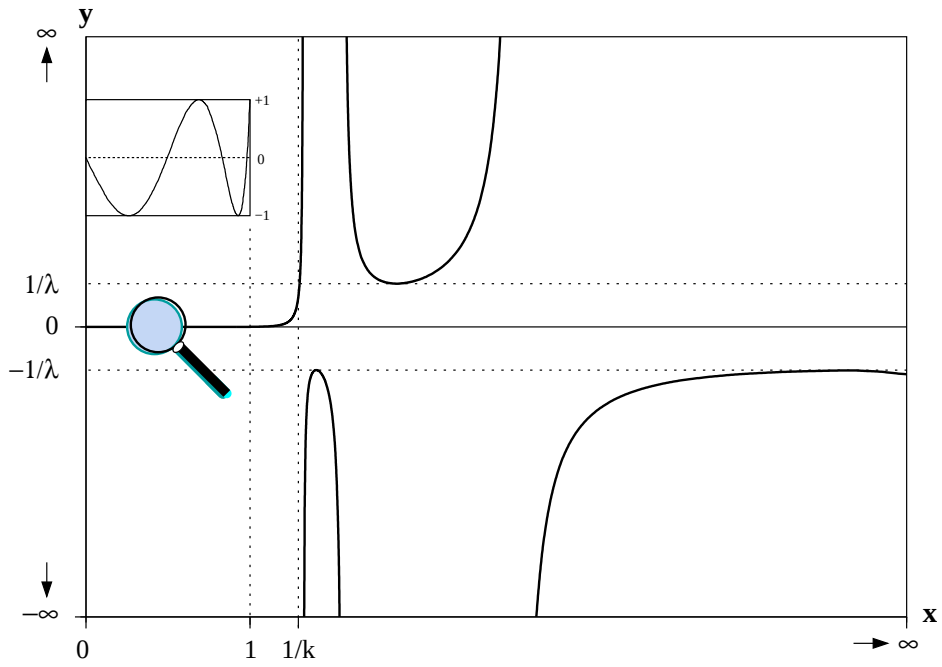


Abbildung C.15.: Erste elliptische Haupttransformation für $n = 7$

C.4.8.3. Rationale Lösungsfunktion

Aus den wichtigsten Eigenschaften der Differentialgleichung C.70 sowie der Transformationsfunktion, welche in Abschnitt C.4.5 erarbeitet wurden, hat schon C.G.J. Jacobi in [Jac29] die folgende spezielle Form der rationalen Transformationsfunktion geschlußfolgert (vgl. auch [Cay76, § 229], [Ach70, § 40]).

$$y = \frac{x}{M} \cdot \frac{\left(1-\frac{x^2}{a_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a_4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a_6^2}\right)\cdots}{(1-k^2a_2^2x^2)(1-k^2a_4^2x^2)(1-k^2a_6^2x^2)\cdots} = \frac{x}{M}\prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\frac{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}{1-k^2a_\nu^2x^2} \tag{C.125}$$

Sie gewährleistet insbesondere, daß

- $y = f(x;k)$ eine rationale, ungerade Polynomfunktion der Form $U(x)/V(x)$ ist;
- das Verhalten für reziproke Argumente der Art $1/kx$ konform zu Gleichung C.81 erfüllt werden kann;

- sowie die speziellen Werte $f(0;k)=0$ und $f(1;k)=(-1)^{(n-1)/2}$ realisierbar sind.[47]

C.4.8.4. Nullstellen (Koeffizienten)

Offen ist unter anderem die Bestimmung der Koeffizienten a_i, welche sowohl zur Berechnung von M als auch λ benötigt werden. Dazu muß man sich über die Lage und Anzahl der Nullstellen in Gleichung C.125 klar werden.

1. Die durch Gleichung C.125 repräsentierte Funktion hat n Nullstellen, wobei $(n-1)/2$ davon letztlich die Koeffizienten a_ν erzeugen.
2. In der gleichwertigen (elliptischen) Parameterdarstellung C.77, also in $y=\mathrm{sn}(u/M;\lambda)$, müssen diese Nullstellen ebenfalls enthalten sein.

Die Koeffizienten a_ν der rationalen Transformationsgleichung C.125 sind nun folgendermaßen bestimmt

$$a_\nu = \mathrm{sn}\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right), \qquad \nu = 2,4,6,\ldots,n-1\,. \tag{C.126}$$

Beweis. Kennt man die Nullstellen $\mathring{x}_\nu$ von Gleichung C.125, dann kennt man auch die Koeffizienten a_ν darin.[48]

$$a_\nu = \mathring{x}_\nu, \qquad \nu = 2,4,6,\ldots,n-1$$

Die reellen Nullstellen, die alle im Bereich $|x|<1$ bzw. $|u|<K$ liegen, ergeben sich aus der elliptischen Parameterdarstellung für y

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{sn}\left(\tfrac{\mathring{u}_\nu}{M};\lambda\right)=0 \\ \mathring{u}_\nu &= \nu M\Lambda, \qquad |\nu| = 0,2,4,6,\ldots,n-1 \end{aligned}$$

sowie der für x in Verbindung mit den Periodenbeziehungen.

[47] Wobei der Wert $f(1;k)=(-1)^{(n-1)/2}$ durch den Multiplikator M angepaßt wird.
[48] Wobei an dieser Stelle nur die positiven und von Null verschiedenen Nullstellen betrachtet werden.

$$
\begin{aligned}
\underset{\circ}{x}_\nu &= \mathrm{sn}(\underset{\circ}{u}_\nu; k) \\
\underset{\circ}{x}_\nu &= \mathrm{sn}\left(\nu\tfrac{K}{n}; k\right) \leq 1, \qquad |\nu| = 0,2,4,6,\ldots,n-1
\end{aligned}
\tag{C.127}
$$

□

C.4.8.5. Polstellen

Die $n-1$ reellen Pole ermitteln sich nun recht einfach, wenn man in Gleichung C.125 die Produktterme des Nenners Null setzt.

$$
\begin{aligned}
\underset{\times}{x}_\nu &= \frac{1}{ka_\nu} = \frac{1}{k\underset{\circ}{x}_\nu} \\
\underset{\times}{x}_\nu &= \frac{1}{k\mathrm{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right)} \geq \frac{1}{k}, \qquad |\nu| = 2,4,6,\ldots,n-1
\end{aligned}
\tag{C.128}
$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn die elliptische Darstellung mittels Gleichung C.76 und C.77 als Ausgangspunkt genommen wird. Die Pole liegen dann offensichtlich auf dem Wegabschnitt ③ laut Abbildung C.14 bzw. Tabelle C.5, und zwar bei $\underset{\times}{u}_\nu = K + \mathrm{j}K' + \nu K/n$.

C.4.8.6. Extremwerte

Die lokalen Extremwerte, deutlich sichtbar auch in Abbildung C.15, liegen bei

$$
\begin{aligned}
x_E &= \mathrm{sn}(u_E; k) = \begin{cases} \pm\mathrm{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \\ \pm\frac{1}{k}\mathrm{ns}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \end{cases}, \qquad \nu = 1,3,5,\ldots n-2 \\
y_E &= \mathrm{sn}(\tfrac{u_E}{M}; \Lambda) = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm\frac{1}{\lambda} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Die Bestimmung der Extremwerte kann (wie üblich) mit Hilfe der ersten Ableitung von $y = f(x;k)$ erfolgen. Bedenkt man aber, daß $y = f(x;k)$ ja die Lösung der Differentialgleichung C.69 ist, dann kann man mit Blick auf Formel C.71 sofort zur Bestimmung der Nullstellen von $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ übergehen.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\mathrm{cn}(\frac{u}{M};\lambda)\,\mathrm{dn}(\frac{u}{M};\lambda)}{\mathrm{cn}(u;k)\,\mathrm{dn}(u;k)} = 0\,.$$

Die Kombination der Nullstellen von $\mathrm{cn}(u/M;\lambda)$ und $\mathrm{dn}(u/M;\lambda)$ führt nach Tabelle C.1 für u zu den Extremstellen

$$\begin{aligned} \frac{u_E}{M} &= (2\eta+1)\Lambda + \mathrm{j}\zeta\Lambda', \qquad \eta,\zeta \in \mathbb{Z} \\ u_E &= (2\eta+1)\frac{K}{n} + \mathrm{j}\zeta K'\,. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Ausprägungen des elliptischen Sinus' für spezielle Argumente nach Tabelle C.2, dann kann der Beweis abgeschlossen werden.

$$\begin{aligned} x_E = \mathrm{sn}(u_E;k) &= \begin{cases} \pm\mathrm{sn}\left(\nu\frac{K}{n};k\right) & (\nu = 1,3,5,\ldots n-2\,;\ \zeta \text{ gerade}) \\ \pm\frac{1}{k}\mathrm{ns}\left(\mu\frac{K}{n};k\right) & (\mu = 1,3,5,\ldots n-2\,;\ \zeta \text{ ungerade}) \end{cases} \\ y_E = \mathrm{sn}(\tfrac{u_E}{M};\Lambda) &= \begin{cases} \pm 1 & (\nu = 1,3,5,\ldots n-2\,;\ \zeta \text{ gerade}) \\ \pm\frac{1}{\lambda} & (\mu = 1,3,5,\ldots n-2\,;\ \zeta \text{ ungerade}) \end{cases}\,. \end{aligned}$$

□

C.4.8.7. Beziehungen für die elliptischen Funktionen

Transformationsbeziehung für sn Die Transformationsbeziehung bei Verwendung des elliptischen Sinus' ist direkt in Gleichung C.125 enthalten, wenn man x und y entsprechend der Beziehungen C.76 und C.77 ersetzt.

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{M} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-\frac{\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{sn}^2(\nu K/n;k)}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)} \tag{C.129}$$

Aus der letzten Darstellung der Transformationsbeziehung läßt sich auch die Linearfaktorzerlegung mit Hilfe der Pol- und Nullstellen gewinnen.

$$y = \frac{x}{M} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-\frac{x^2}{\mathring{x}_\nu^2}}{1-k^2\mathring{x}_\nu^2 x^2}$$

$$y = \frac{x}{M} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left[\frac{1}{k^2\mathring{x}_\nu^4} \cdot \frac{(x-\mathring{x}_\nu)(x+\mathring{x}_\nu)}{(x-\frac{1}{k\mathring{x}_\nu})(x+\frac{1}{k\mathring{x}_\nu})}\right]$$

$$y = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{k}{\lambda} Mx \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{(x-\mathring{x}_\nu)(x+\mathring{x}_\nu)}{(x-\overset{\times}{x}_\nu)(x+\overset{\times}{x}_\nu)}$$

Weitere interessante Darstellungen der Transformationsbeziehung C.129 ergeben sich bei Vorwegnahme von Gleichung C.138

$$\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right) = M \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)$$

sowie Multiplikationsformel C.47.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M};\lambda) &= \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{M} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \cdot \frac{\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)-\mathrm{sn}^2(u;k)}{1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)} \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{sn}\left(u+\nu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}\left(u-\nu\frac{K}{n};k\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}\mathrm{sn}(u;k) \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{sn}\left(u+\nu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}\left(u-\nu\frac{K}{n};k\right) \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} \prod_{\nu=-(n-1),-(n-3),\ldots}^{n-1} \mathrm{sn}\left(u+\nu\frac{K}{n};k\right)
\end{aligned}$$

Transformationsbeziehung für cn Die Beziehungen für cn und dn können z. B. abgeleitet werden, indem man die Pole und Nullstellen der (ebenfalls) rationalen Polynome $\mathrm{cn}^2(u/M;\lambda) = 1-y^2$ und $\mathrm{dn}^2(u/M;\lambda) = 1-\lambda^2 y^2$ ermittelt. Beide Funktionen haben die gleichen Pole, wie der elliptische Sinus $y = \mathrm{sn}(u/M;\lambda) = U(x)/V(x)$ für diesen Fall.

$$1-y^2 = \frac{V^2(x)-U^2(x)}{V^2(x)}$$
$$1-\lambda^2 y^2 = \frac{V^2(x)-\lambda^2 U^2(x)}{V^2(x)}$$

Zur Bestimmung der Linearfaktoren des Zählers wird zuerst der elliptische Cosinus $\mathrm{cn}(u/M;\lambda)$ betrachtet, dessen Nullstellen bei $(2\nu+1)M\Lambda = (2\nu+1)K/n$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$ liegen. An diesen Stellen nimmt x nach Gleichung C.76 die Werte $\mathrm{sn}\,[(2\nu+1)K/n;k]$ an. Da der Grad des Zählerpolynoms genau dem von y entspricht läßt sich folgende Linearfaktordarstellung angeben, die abgesehen vom Vorfaktor A eindeutig bestimmt ist.

$$1-y^2 = \mathrm{cn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda) = A^2 \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{4n-1}\left[x-\mathrm{sn}\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}$$

Wegen der Symmetrie $\mathrm{sn}(K-u;k) = \mathrm{sn}(K+u;k)$ und der Spiegelungsbeziehung $\mathrm{sn}(2K-u;k) = -\mathrm{sn}(2K+u;k)$ kann man den Zähler vereinfachen.

$$\begin{aligned}\mathrm{cn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda) &= A^2(1-x^2)\frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2}\left[x^2-\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}\\ &= A^2(1-x^2)\prod_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2}\mathrm{sn}^4\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\cdot\frac{\prod\limits_{\eta=1,3,5,\ldots}^{n-2}\left[1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2(\eta K/n;k)}\right]^2}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}\end{aligned}$$

Aus dem schon bekannten Funktionswert $y = f(0;k) = 0$ entsprechend Abschnitt C.4.5, Formel C.82 kann man abschließend den Vorfaktor A ermitteln

$$1 = A^2 \prod_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{sn}^4\left(\mu\tfrac{K}{n}; k\right)$$

$$A^2 = \frac{1}{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{sn}^4\left(\mu\tfrac{K}{n}; k\right)}$$

und damit die Transformationsbeziehung für cn angeben.

$$\mathrm{cn}(\tfrac{u}{M}; \lambda) = \mathrm{cn}(u; k) \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 - \frac{\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{sn}^2(\mu K/n; k)}}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 - k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\tfrac{K}{n}; k\right)\mathrm{sn}^2(u; k)} \tag{C.130}$$

Transformationsbeziehung für dn Für dn kann man in gleicher Art und Weise verfahren, also beginnend mit der Bestimmung der Nullstellen. Wegen $\mathrm{dn}(v + \mathrm{j}K'; k) = -\mathrm{jcs}(v; k)$ nach Tabelle C.3 liegen die Nullstellen (bezüglich u) bei $(2\nu+1)M\Lambda + \mathrm{j}M\Lambda' = (2\nu+1)K/n + \mathrm{j}K'$ mit $\nu \in \mathbb{Z}$. Da aber (vgl. ebenfalls Tabelle C.3) für sn die Beziehung $\mathrm{sn}(v + \mathrm{j}K'; k) = k^{-1}\mathrm{ns}(v; k)$ gilt, nimmt x an den Nullstellen die Werte $k^{-1}\,\mathrm{ns}\,[(2\nu+1)K/n; k]$ an. Nun ist man (wie beim elliptischen Cosinus auch) in der Lage eine entsprechende Linearfaktordarstellung anzugeben.

$$\begin{aligned}
1 - \lambda^2 y^2 = \mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M}; \lambda) &= B^2 \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{4n-1} x - k^{-1}\mathrm{ns}\left(\mu\tfrac{K}{n}; k\right)}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left[1 - k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\tfrac{K}{n}; k\right)x^2\right]^2} \\
&= B^2\left(x^2 - k^{-2}\right) \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \left[x^2 - k^{-2}\mathrm{ns}^2\left(\mu\tfrac{K}{n}; k\right)\right]^2}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left[1 - k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\tfrac{K}{n}; k\right)x^2\right]^2}
\end{aligned}$$

Aus dem Funktionswert $y = 0$ an der Stelle $x = 0$ kann man wieder den Vorfaktor bestimmen.

$$B^2 = -k^2 \prod_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} k^4\mathrm{sn}^4\left(\mu\tfrac{K}{n}; k\right)$$

Einsetzen und Ausmultiplizieren des Zählers liefert das Ergebnis

$$\mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M};\lambda) = \left(1-k^2x^2\right)\frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}$$

$$\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \sqrt{1-k^2x^2}\,\frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)x^2}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2} \tag{C.131}$$

$$\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \mathrm{dn}(u;k)\,\frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}\,. \tag{C.132}$$

C.4.8.8. Der Multiplikator M

Mit dem Funktionswert $y = (-1)^{(n-1)/2}$ an der Stelle $x = 1$ kann man den Multiplikator M in Gleichung C.125 recht einfach bestimmen (vgl. auch allgemeine Aussagen in Abschnitt C.4.5, Formel C.82).

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{M}\prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\frac{1-a_\nu^{-2}}{1-k^2a_\nu^2}$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\frac{1-a_\nu^{-2}}{1-k^2a_\nu^2} \tag{C.133}$$

Mit der Formel für die Koeffizienten a_ν ergeben sich neue Darstellungsmöglichkeiten sowohl für M als auch λ. Dazu soll mit Hilfe der Verschiebungsrelation $\mathrm{sn}(K-u;k) = \mathrm{cd}(u;k)$ nach C.3 zuerst der folgende (mehrfach auftretende) Term vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}\frac{1-a_\nu^2}{1-k^2a_\nu^2} &= \mathrm{cd}^2\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right), && \nu = 2,4,6,\ldots,n-1\\ &= \mathrm{sn}^2\left(K-\nu\tfrac{K}{n};k\right)\\ &= \mathrm{sn}^2\left((n-\nu)\tfrac{K}{n};k\right)\\ &= \mathrm{sn}^2\left(\mu\tfrac{K}{n};k\right), && \mu = n-2,n-4,\ldots,5,3,1\end{aligned} \tag{C.134}$$

Jetzt kann ausgehend von Gleichung C.133 der Multiplikator M konkretisiert werden.

$$M = \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1}{a_\nu^2}\cdot\frac{1-a_\nu^2}{1-k^2a_\nu^2} = \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \tag{C.135}$$

C.4.8.9. Das Modul λ

Aus der Eigenschaft der Unveränderlichkeit von Differentialgleichung C.69 für $x := 1/kx$ und $y := 1/\lambda y$ nach Formel C.81 kann man das Modul λ ermitteln.

$$\lambda = M^2k^n \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} a_\nu^4 = k^n \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left(\frac{1-a_\nu^2}{1-k^2a_\nu^2}\right)^2 \tag{C.136}$$

Beweis. Dazu geht man wieder von Gleichung C.125 aus und nimmt darin die entsprechenden Substitutionen vor.

$$\frac{1}{\lambda y} = \frac{1}{kM}\prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-\frac{1}{k^2a_\nu^2x^2}}{1-\frac{a_\nu^2}{x^2}}$$

Da auch hier die Bedingung $y = f(1;k) = (-1)^{(n-1)/2}$ erfüllt sein soll (vgl. spezielle Werte nach Formel C.82), kann man, wenn Gleichung C.133 hinzugenommen wird, schreiben

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{kM} \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-\frac{1}{k^2 a_\nu^2}}{1-a_\nu^2} \\
\lambda &= kM \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-a_\nu^2}{1-\frac{1}{k^2 a_\nu^2}} \\
&= kM \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} k^2 a_\nu^4 \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-a_\nu^{-2}}{1-k^2 a_\nu^2} \\
\lambda &= M^2 k^n \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} a_\nu^4 \,.
\end{aligned}
\tag{C.137}
$$

Setzt man nun die Darstellung für M nach Formel C.135 in Gleichung C.137 ein, dann erhält man recht schnell eine Darstellung für λ, die nur noch von den Koeffizienten a_ν abhängt. Dazu werden Zähler und Nenner außerdem mit mit $k^2 a_\nu^2$ multipliziert und dann mittels $k \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} k^2 = k^n$ weiter vereinfacht.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1-a_\nu^2}{1-\frac{1}{k^2 a_\nu^2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{a_\nu^2}}{1-k^2 a_\nu^2} \\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} k^2 \frac{1-a_\nu^2}{k^2 a_\nu^2 - 1} \cdot \frac{a_\nu^2 - 1}{1-k^2 a_\nu^2} \\
\lambda &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^n \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left(\frac{1-a_\nu^2}{1-k^2 a_\nu^2} \right)^2
\end{aligned}
$$

□

Wie auch in [Jac29, § 23] dargestellt, führt (unter Zuhilfenahme von Formel C.134) Einsetzen der Koeffizientenbeziehung C.126 zu der folgenden bekannten Form für λ:

$$
\lambda = k^n \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \operatorname{sn}^4\left(\nu \tfrac{K}{n}; k\right) = M^2 k^n \prod_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}^4\left(\nu \tfrac{K}{n}; k\right) \,. \tag{C.138}
$$

C.4.8.10. Das komplementäre Modul λ'

Die Beziehung zwischen den komplementären Modulen kann direkt aus Gleichung C.132 abgelesen werden, wenn man dort den speziellen Wert $u = K$ (also $\mathrm{dn}(n\Lambda;\lambda) = \lambda'$) einsetzt.

$$\lambda' = k' \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 - k^2 \mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 - k^2 \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} = k' \frac{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{dn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{dn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)}$$

Mit $\mathrm{dn}(K-u;k) = k'\mathrm{nd}(u;k)$ kann man diese Relation bei entsprechender Umindizierung sogar noch weiter vereinfachen.

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{k' \prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} k'^2}{\prod\limits_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{dn}^2\left[(n-\mu)\frac{K}{n};k\right] \prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{dn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \\ &= \frac{k'^n}{\prod\limits_{\nu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{dn}^4\left(\nu\frac{K}{n};k\right)}\end{aligned}$$

C.4.9. Erste elliptische Haupttransformation, *n* gerade

C.4.9.1. Funktionsverlauf

Für gerades $\gamma = n$ muß die Integrationskonstante C aus Abschnitt C.4.5 die reelle Viertelperiode $C = \Omega/2 = M\Lambda$ annehmen (vgl. auch Tabelle C.6),

$$y = \mathrm{sn}(\tfrac{u}{M} + \Lambda;\lambda) = \mathrm{cd}(\tfrac{u}{M};\lambda) \tag{C.139}$$

damit $y = f(x;k)$ eine gerade Funktion und außerdem auf Wegabschnitt ② in Abbildung C.8a reell ist. Der zugeordnete Verlauf des Parameters u (inklusive der positiven Nullstellen und Pole) ist dazu nocheinmal anschaulich in Abbildung C.16 illustriert.

Der Funktionsverlauf von $y = f(x;k)$ entspricht prinzipiell dem für ungerade n, nur der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ ist wegen der Verschiebung entlang der reellen Achse $y = 1$ (siehe Abbildung C.17).

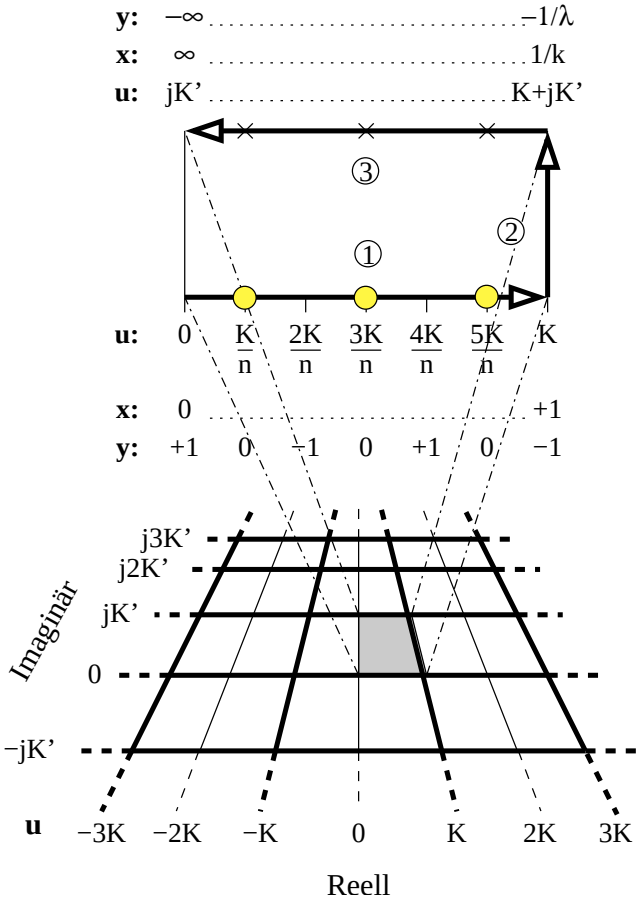


Abbildung C.16.: Verlauf von u in der komplexen Ebene ($n = 6$, gerade)

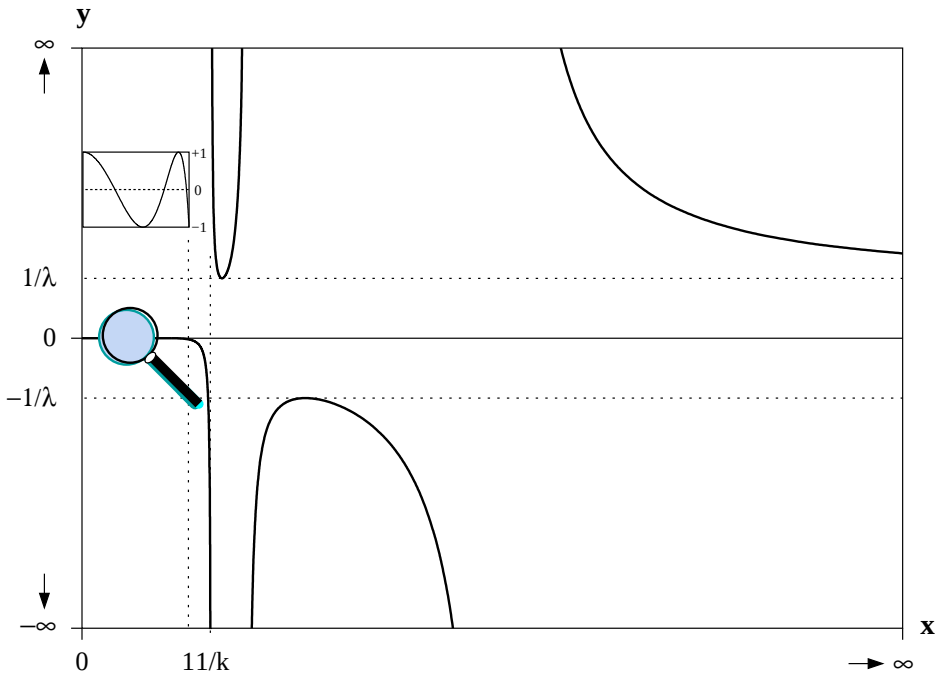


Abbildung C.17.: Erste elliptische Haupttransformation für $n = 6$

C.4.9.2. Rationale Lösungsfunktion

Aus den wichtigsten Eigenschaften der Differentialgleichung C.70 sowie der Transformationsfunktion, welche in Abschnitt C.4.5 erarbeitet wurden, kann man wiederum auf die Form der (diesmal geraden) rationalen Transformationsfunktion schließen [Ach70, Tab. XXII].

$$y = \frac{\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a_3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a_5^2}\right)\cdots}{(1-k^2a_1^2x^2)(1-k^2a_3^2x^2)(1-k^2a_5^2x^2)\cdots} = \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}{1-k^2a_\nu^2x^2} \tag{C.140}$$

Sie erfüllt unter anderem auch die speziellen Werte $f(0;k) = 1$ und $f(1;k) = (-1)^{n/2}$. Aus dem Funktionswert $f(0;k) = 1$ ergibt sich die noch erwähnenswerte Beziehung:[49]

$$\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} a_\nu^2 = \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1-a_\nu^2}{1-k^2a_\nu^2}\,.$$

[49] Diese Relation ist, wenn man die Koeffizientenformel kennt, auch sofort aus $\mathrm{sn}(K-\nu\frac{K}{n};k) = \mathrm{cd}\left[\nu\frac{K}{n};k\right]$ abzuleiten.

C.4.9.3. Nullstellen (Koeffizienten), Pole und Extremwerte

Wie schon Abbildung C.16 anschaulich zeigt, ist die Lage der Pole und Nullstellen (gegenüber ungeradem Grad n) entsprechend der Integrationskonstante C um $\Omega/2 = M\Lambda$, also für u um K/n verschoben (vgl. Wegabschnitte ① und ③).

$$a_\nu = \underset{\circ}{x}_\nu = \mathrm{sn}\left(\nu\tfrac{K}{n}; k\right), \qquad \nu = 1,3,5,\ldots,n-1 \tag{C.141}$$

$$\underset{\times}{x}_\nu = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right)} \geq \frac{1}{k} \tag{C.142}$$

Gleiches gilt auch für die Extremwerte

$$x_E = \begin{cases} \pm\mathrm{sn}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \\ \pm\frac{1}{k}\mathrm{ns}\left(\nu\frac{K}{n}; k\right) \end{cases}, \qquad \nu = 0,2,4,\ldots,n-2$$

$$y_E = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm\frac{1}{\lambda} \end{cases},$$

wobei einer der Werte für $\nu = 0$ bei $x \to \infty$ zu liegen kommt.

C.4.9.4. Beziehungen für die elliptischen Funktionen

Transformationsbeziehung für sn Die Transformationsbeziehung für den elliptischen Sinus ist wieder direkt in Gleichung C.140 enthalten, wenn man x und y durch die entsprechenden elliptischen Funktionen ersetzt.

$$\mathrm{sn}(\tfrac{u}{M} + \Lambda; \lambda) = \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1 - \frac{\mathrm{sn}^2(u;k)}{\mathrm{sn}^2(\nu K/n;k)}}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n}; k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)} \tag{C.143}$$

Eine weitere interessante Darstellung der Transformationsbeziehung C.129 ergibt sich auch hier mit Hilfe von Multiplikationsformel C.47.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) &= \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)-\operatorname{sn}^2(u;k)}{1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\operatorname{sn}^2(u;k)} \\
&= (-1)^{\frac{n}{2}} \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{\operatorname{sn}\left(u+\nu\frac{K}{n};k\right)\operatorname{sn}\left(u-\nu\frac{K}{n};k\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \\
&= (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \prod_{\nu=-(n-1),-(n-3),\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}\left(u+\nu\frac{K}{n};k\right)
\end{aligned}$$

Transformationsbeziehung für cn Ähnlich wie für den Fall eines ungeraden n (vgl. Abschnitt C.4.8.7) kann man auch hier vorgehen und erhält in Folge

$$\operatorname{cn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = -\frac{\lambda'}{M}\operatorname{sn}(u;k)\operatorname{cn}(u;k)\frac{\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} 1-\frac{\operatorname{sn}^2(u;k)}{\operatorname{sn}^2(\mu K/n;k)}}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} 1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\operatorname{sn}^2(u;k)}. \tag{C.144}$$

Beweis. Auch diesmal kann man die Gleichung für cn durch Betrachtung der Pole und Nullstellen herleiten (vgl. Abschnitt C.4.8.7). Dazu geht man wieder von einem Ansatz aus, in welchem eigentlich nur ein Vorfaktor zu bestimmen ist.

$$1-y^2 = \operatorname{cn}^2(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = A^2\frac{\prod_{\mu=0,2,4,\ldots}^{4n-2} x-\operatorname{sn}\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}$$

Wegen der Symmetrie des elliptischen Sinus um K, d. h. $\operatorname{sn}(K-u;k)=\operatorname{sn}(K+u;k)$ sowie der Spiegelungsbeziehung $\operatorname{sn}(2K-u;k)=-\operatorname{sn}(2K+u;k)$ kann vorher noch das Produkt im Zähler reduziert werden. Löst man dabei außerdem die Faktoren für $\mu=0,n,2n$ und $3n$ heraus, so ergibt sich

$$\mathrm{cn}^2(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = -A^2x^2(1-x^2)\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\left[x^2-\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}\,.$$

Um den Vorfaktor A nun zu bestimmen, kann man z. B. den Funktionswert für $x\to\infty$ heranziehen, welcher schon zu $y=1/\lambda$ ermittelt wurde.

$$1-\frac{1}{\lambda^2} = \lim_{x\to\infty} -A^2x^2(1-x^2)\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\left[x^2-\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}$$

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = -\lim_{x\to\infty} A^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\left[1-\frac{\mathrm{sn}^2(\mu K/n;k)}{x^2}\right]^2}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[\frac{1}{x^2}-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}$$

$$A^2 = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\right]^2$$

$$A^2 = \left(k^n\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\mathrm{sn}^4\left(\nu\frac{K}{n};k\right)$$

Einsetzen des gerade ermittelten Vorfaktors führt zu einer ersten geschlossen Lösung

$$\mathrm{cn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = -k^n\frac{\lambda'}{\lambda}x\sqrt{1-x^2}\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}x^2-\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2},$$

welche allerdings nicht gerade übersichtlich ist. Mit Vorgriff auf die Berechnungsformeln für λ und M (Gleichungen C.146 und C.147) und deren Beziehung zueinander

$$\frac{\lambda}{M} = (-1)^{\frac{n}{2}}k^n\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)$$

ist man in der Lage, eine etwas kürzere Form anzugeben.

$$\mathrm{cn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = -\frac{\lambda'}{M}\,x\sqrt{1-x^2}\,\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} 1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} 1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2}$$

□

Transformationsbeziehung für dn Die entsprechende Beziehung für dn lautet:

$$\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = \lambda'\mathrm{dn}(u;k)\,\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} 1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} 1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}\,. \tag{C.145}$$

Beweis. Auch hier geht man am besten wieder von den Nullstellen aus, welche entsprechend der Definition für die elliptische Delta-Amplitude dort liegen müssen, wo $\mathrm{sn}(u/M+\Lambda;\lambda)$den Wert $1/\lambda$ annimmt. Genau diese Stellen haben wir aber schon als Extremwerte des Funktionsverlaufes dieser Transformation erkannt. Sie liegen bei $x_E = \pm k^{-1}\mathrm{ns}(\mu K/n;k)$mit $\mu = 0,\pm 2,\pm 4,\ldots$, was folgenden Ansatz für eine Linearfaktordarstellung rechtfertigt

$$1-\lambda^2y^2 = \mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = B^2\,\frac{\prod\limits_{\substack{\mu=2,4,6,\ldots\\ \mu\neq 2n}}^{4n-2}\left[x-k^{-1}\mathrm{ns}\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}\,.$$

Wieder berücksichtigen wir, daß $\mathrm{sn}(u;k)$ eine ungerade Funktion mit der Halbperiode $2K$ ist und extrahieren außerdem den speziellen Wert $\mathrm{ns}(\mu K/n;k) = \pm 1$für die Indizes $\mu = n, 3n$.

$$\mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = B^2\left(x^2-k^{-2}\right)\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\left[x^2-k^{-2}\mathrm{ns}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}$$

Der Vorfaktor kann z. B. durch Einsetzen des Funktionswertes an der Stelle $u = 0$, d. h. $y = f(0;k) = 1$ bestimmt werden.

$$1-\lambda^2 = -B^2k^{-2}\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\left[k^{-2}\mathrm{ns}^2\left(\mu\tfrac{K}{n};k\right)\right]^2$$

$$B^2 = -\lambda'^2k^{2(n-1)}\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\mathrm{sn}^4\left(\mu\tfrac{K}{n};k\right)$$

Mit diesem Ausdruck für B kann man nun die Transformationsbeziehung für $\mathrm{dn}(u/M+\Lambda;\lambda)$ konkretisieren.

$$\mathrm{dn}^2(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = \lambda'^2\left(1-k^2x^2\right)\frac{\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\mu\tfrac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\left[1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right)x^2\right]^2}$$

$$\mathrm{dn}(\tfrac{u}{M}+\Lambda;\lambda) = \lambda'\mathrm{dn}(u;k)\frac{\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\mu\tfrac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}1-k^2\mathrm{sn}^2\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}$$

□

C.4.9.5. Das Modul λ

Das Modul λ kann auf den verschiedensten Wegen bestimmt werden, z. B. auch wieder aus der Eigenschaft der Invarianz von Differentialgleichung C.69 für $x := 1/kx$ und $y := 1/\lambda y$ nach Formel C.81.

$$\lambda = k^n\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\mathrm{sn}^4\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right) \tag{C.146}$$

Beweis. An dieser Stelle soll zur Abwechslung ein anderer, ebenfalls sehr einfacher Weg, beschritten werden. Dazu evaluiert man Transformationsbeziehung C.140 am Extremwert $x_E \to \infty$, wo bekanntlich $y_E = 1/\lambda$ gelten muß.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= \lim_{x\to\infty} \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1-\frac{x^2}{a_\nu^2}}{1-k^2a_\nu^2x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a_\nu^2}}{\frac{1}{x^2}-k^2a_\nu^2} \\
&= \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{1}{k^2a_\nu^4} \\
&= k^n \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}^4\left(\nu\tfrac{K}{n};k\right)
\end{aligned}
$$

□

C.4.9.6. Der Multiplikator M

Der Multiplikator M hat im Fall eines geraden n den Wert

$$
M = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)} \,. \tag{C.147}
$$

Beweis. Der Multiplikator M kann diesmal nicht durch einfaches Einsetzen spezieller Werte ermittelt werden, da er in der rationalen Form C.140 nicht auftaucht. Statt dessen wird hier die erste Ableitung der elliptischen als auch der rationalen Transformationsbeziehung herangezogen und mit deren Hilfe M bestimmt. Zuerst wenden wir uns deshalb dem Ausgangsproblem der Transformationstheorie, nämlich Differentialgleichung C.71 zu. Um einen relativ einfachen Lösungsweg zu beschreiten, konzentrieren wir uns dabei auf die Nullstellen $\mathring{x}_m$bzw. $\mathring{u}_m$mit $\mathring{u}_m = mK/n = mM\Lambda$ (m ungerade).

$$
y' = f'(\mathring{x}_m;k) = \frac{1}{M\sqrt{(1-\mathring{x}_m^2)(1-k^2\mathring{x}_m^2)}}
$$

Aus dieser Gleichung kann man, wenn $f'(\mathring{x}_m;k)$ bekannt ist, sofort den Parameter M ermitteln.

$$M = \frac{1}{f'(\mathring{x}_m; k)\mathrm{cn}(\mathring{u}_m; k)\mathrm{dn}(\mathring{u}_m; k)} \tag{C.148}$$

Die erste Ableitung der rationalen Transformationsbeziehung C.140 kann durch logarithmische Differentiation gewonnen werden. Dazu seien vorab noch die folgenden Kurzformen vereinbart und ihre Ableitungen gebildet.

$$p_\nu(x) = 1 - \frac{x^2}{a_\nu^2} \qquad p'_\nu(x) = -\frac{2x}{a_\nu^2}$$

$$q_\nu(x) = 1 - k^2 a_\nu^2 x^2 \qquad q'_\nu(x) = -2k^2 a_\nu^2 x$$

Es folgt die eigentliche Differentiation von

$$\ln y = \ln \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{p_\nu(x)}{q_\nu(x)}$$

zu

$$\begin{aligned}
\frac{f'(\mathring{x}_m; k)}{f(\mathring{x}_m; k)} &= \sum_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \left[\frac{p_\mu(x)}{q_\mu(x)}\right]' \frac{q_\mu(x)}{p_\mu(x)} \\
f'(\mathring{x}_m; k) &= \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \left[\frac{p_\nu(x)}{q_\nu(x)}\right] \sum_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \left[\frac{p_\mu(x)}{q_\mu(x)}\right]' \cdot \frac{q_\mu(x)}{p_\mu(x)} \\
&= \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \left[\frac{p_\nu(x)}{q_\nu(x)}\right] \sum_{\mu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{p'_\mu(x)q_\mu(x) - q'_\mu(x)p_\mu(x)}{p_\mu(x)q_\mu(x)} \,.
\end{aligned}$$

Setzt man jetzt die Nullstelle $\mathring{x}_m$ ein, dann verschwindet $p_m(\mathring{x}_m)$ und demzufolge (eigentlich) das ganze Produkt $\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} p_\nu(x)/q_\nu(x)$. Da in diesem Fall aber der Summenterm mit $\mu = m$ eine behebbare Unbestimmtheit aufweist (Kürzen von $p_m(x)$ im Produkt mit $p_\mu(x)$ im Nenner der Summe), verschwindet der Summenausdruck. Dabei gilt es $p'_m(\mathring{x}_m) = -2/\mathring{x}_m$ zu berücksichtigen.

$$
\begin{aligned}
f'(\mathring{x}_m;k) &= \left[\frac{p'_m(\mathring{x}_m)}{p_m(\mathring{x}_m)} - \frac{q'_m(\mathring{x}_m)}{q_m(\mathring{x}_m)}\right] \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{p_\nu(\mathring{x}_m)}{q_\nu(\mathring{x}_m)} \\
&= \frac{p'_m(\mathring{x}_m)}{p_m(\mathring{x}_m)} \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \frac{p_\nu(\mathring{x}_m)}{q_\nu(\mathring{x}_m)} \\
&= -\frac{2}{\mathring{x}_m} \cdot \frac{1}{q_m(\mathring{x}_m)} \prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots \\ \nu\neq m}}^{n-1} \frac{p_\nu(\mathring{x}_m)}{q_\nu(\mathring{x}_m)} \\
&= -\frac{2}{\mathrm{sn}(\mathring{u}_m;k)} \cdot \frac{1}{1-k^2\mathrm{sn}^4(\mathring{u}_m;k)} \prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots \\ \nu\neq m}}^{n-1} \frac{1-\frac{\mathrm{sn}^2(\mathring{u}_m;k)}{\mathrm{sn}^2(\mathring{u}_\nu;k)}}{1-k^2\mathrm{sn}^2(\mathring{u}_\nu;k)\mathrm{sn}^2(\mathring{u}_m;k)}
\end{aligned}
$$

Durch Hinzunahme von Multiplikationsformel C.47, kann man (ähnlich wie bei der Transformationsbeziehung) weiter vereinfachen zu:

$$
\begin{aligned}
f'(\mathring{x}_m;k) &= \frac{(-2)^{\frac{n}{2}}}{\mathrm{sn}\left(m\frac{K}{n};k\right)\left[1-k^2\mathrm{sn}^4\left(m\frac{K}{n};k\right)\right]} \prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots \\ \nu\neq m}}^{n-1} \frac{\mathrm{sn}\left[(m-\nu)\frac{K}{n};k\right]\mathrm{sn}\left[(m+\nu)\frac{K}{n};k\right]}{\mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \\
&= \frac{(-2)^{\frac{n}{2}} \prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots \\ \nu\neq m}}^{n-1} \mathrm{sn}\left[(m-\nu)\frac{K}{n};k\right]\mathrm{sn}\left[(m+\nu)\frac{K}{n};k\right]}{\mathrm{sn}\left(m\frac{K}{n};k\right)\left[1-k^2\mathrm{sn}^4\left(m\frac{K}{n};k\right)\right] \prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots \\ \nu\neq m}}^{n-1} \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \\
&= \frac{(-2)^{\frac{n}{2}}\mathrm{sn}\left(m\frac{K}{n};k\right) \prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots \\ \nu\neq m}}^{n-1} \mathrm{sn}\left[(m-\nu)\frac{K}{n};k\right]\mathrm{sn}\left[(m+\nu)\frac{K}{n};k\right]}{\left[1-k^2\mathrm{sn}^4\left(m\frac{K}{n};k\right)\right] \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \mathrm{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} .
\end{aligned}
$$

Die Indizes $m-\nu$ bzw. $m+\nu$ durchlaufen, wenn man sie zusammenfaßt, alle geraden Werte von $m-(n-1)$ bis $m+(n-1)$, ausgenommen die Werte 0 und $2m$, für die $\nu = m$ gilt. Mit etwas Vorstellungskraft für den Verlauf des elliptischen Sinus und den daraus generierten Nullstellen und Extremwerten ist offensichtlich, daß (abgesehen von den zwei genannten) alle Werte $\mu K/n$ (für gerades μ) einer Halbperiode des elliptischen Sinus' durchlaufen werden. Der Produktterm im Zähler ist demzufolge auch darstellbar als

$$\prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots\\ \nu\neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}\left[(m-\nu)\frac{K}{n};k\right]\operatorname{sn}\left[(m+\nu)\frac{K}{n};k\right] = \frac{\left[\prod\limits_{\mu=2,4,\ldots}^{n-2}\operatorname{sn}\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}{\operatorname{sn}\left(2m\frac{K}{n};k\right)}\,.$$

Der Ausdruck im Nenner dieser Gleichung kann durch Anwendung der Verdoppelungsformel C.51 so angepaßt werden

$$\prod_{\substack{\nu=1,3,5,\ldots\\ \nu\neq m}}^{n-1} \operatorname{sn}\left[(m-\nu)\frac{K}{n};k\right]\operatorname{sn}\left[(m+\nu)\frac{K}{n};k\right] = \frac{\left[1-k^2\operatorname{sn}^4\left(m\frac{K}{n};k\right)\right]\left[\prod\limits_{\mu=2,4,\ldots}^{n-2}\operatorname{sn}\left(\mu\frac{K}{n};k\right)\right]^2}{2\operatorname{sn}\left(m\frac{K}{n};k\right)\operatorname{cn}\left(m\frac{K}{n};k\right)\operatorname{dn}\left(m\frac{K}{n};k\right)}$$

daß die Ableitung an einer Nullstelle nun geschlossen dargestellt werden kann.

$$f'(\underset{\circ}{x}_m;k) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{\mu=2,4,\ldots}^{n-2}\operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}{\operatorname{cn}\left(m\frac{K}{n};k\right)\operatorname{dn}\left(m\frac{K}{n};k\right)\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)} \tag{C.149}$$

Einsetzen in Berechnungsformel C.148 liefert (endlich) den Multiplikator M.

$$M = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}\operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}$$

□

C.4.9.7. Das komplementäre Modul k'

Die Formel für das komplementäre Modul k' kann durch Evaluation der Beziehung C.145 für dn an der Stelle $y = f(1;k) = (-1)^{n/2}$ ermittelt werden.

$$k' = \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1}1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K}{n};k\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2}1-k^2\operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K}{n};k\right)}$$

C.4.10. Zweite elliptische Haupttransformation, *n* ungerade

C.4.10.1. Periodenbeziehungen

Typisch für die 2. elliptische Transformation ist, daß die imaginäre Periode $2\Omega' = 2M\Lambda'$ von $y = g(u/M;\lambda)$ genau n-mal die imaginäre Periode $2\omega' = 2K'$ von $x = h(u;k)$ teilt, die reellen Perioden aber gleich sind (n-te Teilung der imaginären Periode, vgl. Fall $\gamma = 1$, $\delta = n$ in Abschnitt C.4.5). Es handelt sich bei der Beziehung $\lambda = \rho(k)$ also ebenfalls um eine Modulgleichung vom Grad n mit dem zugehörigen Periodenverhältnis

$$\frac{\Lambda}{\Lambda'} = n\frac{K}{K'} \,. \tag{C.150}$$

Allerdings kommt wegen $\gamma = 1$ nur der Wert $C = 0$ für die Integrationskonstante (vgl. Abschnitt C.4.5) in Frage, damit reelle Funktionswerte auf Wegabschnitt ② in Abbildung C.8a bzw. nach Tabelle C.5 entstehen.

C.4.10.2. Funktionsverlauf

Der Funktionsverlauf $y = f(x;k)$ kann mit Hilfe von Abbildung C.18 aus dem Verlauf des Parameters u entsprechend der, in Abbildung C.8a definierten, Wegabschnitte erklärt werden. Auf Abschnitt ① verlaufen x und y ausgehend vom Ursprung im Wesen gleich. Da im Intervall $K \le u \le K + \mathrm{j}K'$, d. h. auf Teilstück ②, die imaginäre Halbperiode $M\Lambda'$ von $y = g(u/M;\lambda)$ n-mal durchlaufen wird, existieren dort keine reellen Nullstellen oder Pole. Statt dessen alterniert $y = \mathrm{nd}(\mathrm{Im}(u)/M;\lambda')$ auf dem Weg $1 \le x \le 1/k$ genau $n-1$ mal zwischen 1 und $1/\lambda$. Auf dem letzten Teilabschnitt ③ strebt y dann kontinuierlich gegen ∞.

Der resultierende Funktionsverlauf $y = f(x;k)$ist in Abbildung C.19 dargestellt.

C.4.10.3. Rationale Lösungsfunktion

Die Form der rationalen Lösungsfunktion $y = f(x;k)$ für die zweite elliptische Haupttransformation bei ungeradem Grad n kann ausgehend von Abbildung C.18 sowie den folgenden Überlegungen abgeleitet werden.

1. Es existieren eine einfache Nullstelle[50] bei $u = 0$ sowie $n-1$ weitere bei jeweils $u_{\circ\mu} =$

[50] Die Nullstelle ist deshalb einfach, weil die weiteren Ableitungen an dieser Stelle nicht verschwinden.

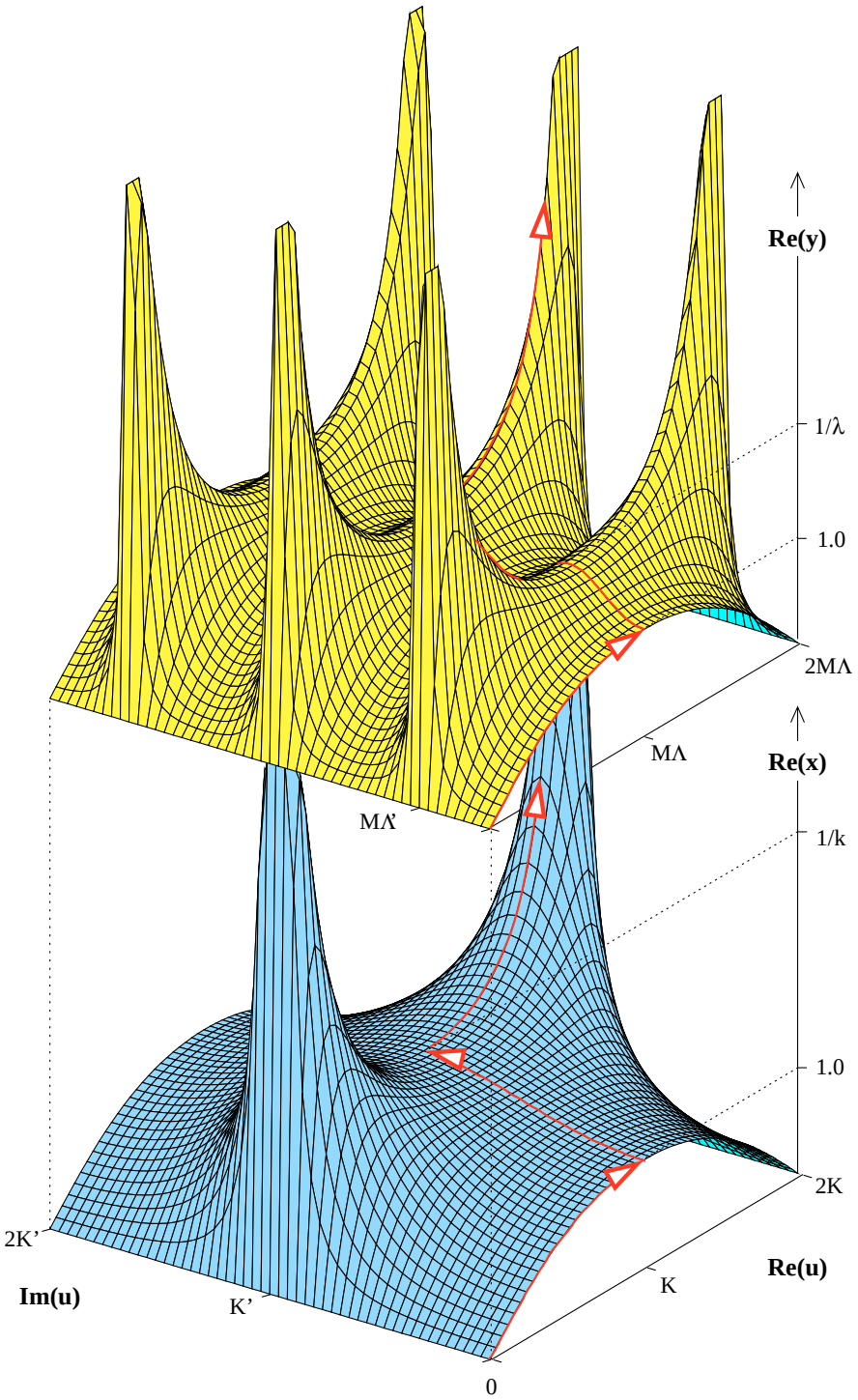


Abbildung C.18.: Parameterdarstellung der 2. elliptischen Transformation ($n = 3$)

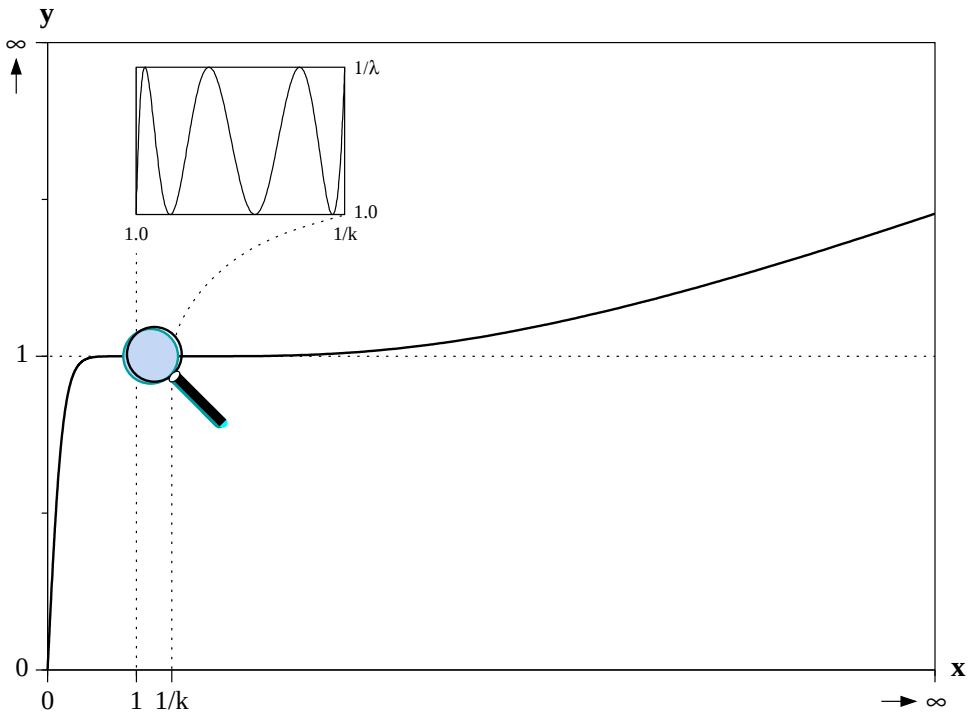


Abbildung C.19.: Zweite elliptische Haupttransformation ($n = 7$)

$\pm \mathrm{j}\mu M\Lambda' = \pm \mathrm{j}\mu K'/n$, μ gerade.

2. Die $n-1$ Pole liegen bei $\underset{\times}{u}_\nu = \pm \mathrm{j}\,\nu M\Lambda' = \pm \mathrm{j}\,\nu K'/n$, ν ungerade.
3. Für $u \to 2K + \mathrm{j}K'$ geht y gegen Unendlich, was sich im Grad von Zähler- und Nennerpolynom widerspiegelt ($n = n' + 1$, vgl. Abschnitt C.4.3).
4. Sowohl $y = g(u;k)$als auch $x = h(u;k)$ sind ungerade Funktionen, deshalb $y = f(x;k)$ ebenfalls.

Aus diesen Gründen kann man als rationale Transformationsfunktion

$$y = \mathrm{sn}(\tfrac{u}{M};\lambda) = \frac{x}{M} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}} \tag{C.151}$$

mit

$$a_\eta = \mathrm{sc}\left(\eta \tfrac{K'}{n}; k'\right) \tag{C.152}$$

angeben.

Beweis. Die vorangegangenen Überlegungen erlauben es, als Ausgangspunkt für die Lösungsfunktion folgende Form anzugeben.

$$y = Ax \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{n-1} (x - \underset{\circ}{x}_\mu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1} (x - \underset{\times}{x}_\nu)}$$

Nimmt man die konkreten Werte der Pole und Nullstellen hinzu

$$\begin{aligned} \underset{\circ}{x}_\mu &= \operatorname{sn}\left(\mathrm{j}\mu \tfrac{K'}{n}; k\right) = \operatorname{jsc}\left(\mu \tfrac{K'}{n}; k'\right) = \mathrm{j}a_\mu \\ \underset{\times}{x}_\nu &= \operatorname{sn}\left(\mathrm{j}\nu \tfrac{K'}{n}; k\right) = \operatorname{jsc}\left(\nu \tfrac{K'}{n}; k'\right) = \mathrm{j}a_\nu \end{aligned}$$

und berücksichtigt das betragsmäßig doppelte Auftreten aller Nullstellen und Pole,[51] dann läßt sich die Ausgangsformel konkretisieren.

$$y = Ax \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left(x^2 + a_\mu^2\right)}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \left(x^2 + a_\nu^2\right)} = Ax \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} a_\mu^2}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} a_\nu^2} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}}$$

□

Eine weitere bekannte Form der Transformationsbeziehung C.151 ist:[52]

$$y = \frac{x}{M} \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1 + \frac{x^2}{a_\mu^2}}{1 + k^2 a_\mu^2 x^2} = \frac{x}{M} \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \frac{1 + k^2 a_\nu^2 x^2}{1 + \frac{x^2}{a_\nu^2}} \,. \tag{C.153}$$

[51] Und denkt außerdem an die imaginäre Transformation des elliptischen Sinus' nach Gleichung C.57.

[52] Sie entspricht genau Transformationsbeziehung C.125 für die erste elliptische Haupttransformation bei ungeradem Grad n, wenn man dort imaginäre Koeffizienten ansetzt.

Beweis. Beide Darstellungen sind schnell zu beweisen, wenn man auf jeden Faktor im Zähler bzw. Nenner von Gleichung C.151 die Beziehung $\mathrm{sc}(K'-u;k') = k^{-1}\mathrm{cs}(u;k')$ nach [AS72, 16.8] anwendet und danach geeignet umindiziert. Beispielhaft wird hier die beschriebene Umformung für den Nenner durchgeführt, wobei der neue Index $\mu = n-\nu$ eingeführt wird.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x}{M}\cdot\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1+\frac{x^2}{a_\mu^2}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1+\frac{x^2}{\mathrm{sc}^2\left(\nu\frac{K'}{n};k'\right)}} \\
&= \frac{x}{M}\cdot\frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1+\frac{x^2}{a_\mu^2}}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1+k^2\mathrm{sc}^2\left(\mu\frac{K'}{n};k'\right)x^2} \\
&= \frac{x}{M}\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1}\frac{1+\frac{x^2}{a_\mu^2}}{1+k^2a_\mu^2x^2}
\end{aligned}
$$

□

C.4.10.4. Nullstellen (Koeffizienten)

Die Nullstellen waren der Ausgangspunkt bei der Ermittlung der Koeffizienten von Nenner- und Zählerpolynom in Transformationsbeziehung C.151 bzw. C.125. Sie liegen in diesem Fall nicht direkt auf den schon desöfteren betrachteten Wegabschnitten ① - ③ von u, sondern auf imaginären Punkten innerhalb des Periodenrechtecks (vgl. auch Abbildung C.18 sowie imaginäre Transformation nach Gleichung C.57, Abschnitt C.57).

$$
x_{\circ\mu} = \mathrm{j}a_\mu = \mathrm{jsc}\left(\mu\frac{K'}{n};k'\right), \qquad \mu = 2,4,6,\ldots,n-1.
$$

C.4.10.5. Polstellen

Die $n-1$ Pole wurden (wie die Nullstellen auch) schon bei der Herleitung der rationalen Transformationsbeziehung bestimmt. Sie sind jedoch auch leicht aus Gleichung C.151 abzulesen.[53]

[53] Oder wieder Beziehung C.85 berücksichtigt: $x_{\times\nu}\cdot x_{\flat\nu} = 1/k$.

$$1 + \frac{x_{\times\nu}^2}{a_\nu^2} = 0$$
$$x_{\times\nu} = \mathrm{jsc}\left(\nu\frac{K'}{n}; k'\right), \qquad \nu = 1,3,5,\ldots,n-2$$

C.4.10.6. Extremwerte

Die lokalen Extremwerte, welche auch in Abbildung C.19 zu erkennen sind, liegen bei

$$x_E = \mathrm{sn}(u_E; k) \; = \pm\mathrm{nd}\left(\nu\frac{K'}{n}; k'\right), \qquad |\nu| = 0,1,2,3,\ldots n-1$$
$$y_E = \mathrm{sn}(\tfrac{u_E}{M}; \Lambda) = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{\lambda} \end{cases} .$$

C.4.10.7. Beziehung für sn

Einsetzen der Koeffizientenformel C.152 in die rationale Transformationsbeziehung C.153 führt zu den elliptischen Darstellungen

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{M} \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1+\mathrm{cs}^2\left(\mu\frac{K'}{n}; k'\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}{1+k^2\mathrm{sc}^2\left(\mu\frac{K'}{n}; k'\right)\mathrm{sn}^2(u;k)} \\ &= \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{M} \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \frac{1+k^2\mathrm{sc}^2\left(\nu\frac{K'}{n}; k'\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}{1+\mathrm{cs}^2\left(\nu\frac{K'}{n}; k'\right)\mathrm{sn}^2(u;k)} \\ &= \frac{\mathrm{sn}(u;k)}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1+\mathrm{cs}^2\left(\mu\frac{K'}{n}; k'\right)\mathrm{sn}^2(u;k)}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1+\mathrm{cs}^2\left(\nu\frac{K'}{n}; k'\right)\mathrm{sn}^2(u;k)} . \end{aligned}$$

Die Formeln für den elliptischen Cosinus und die Delta-Amplitude kann man z. B. [Ach70, Tab. XXIII] entnehmen.

C.4.10.8. Der Multiplikator M

Der Multiplikator M kann durch Evaluation der Transformationsgleichung C.151 oder C.153 an der Stelle $y = f(1;k) = 1$ gewonnen werden.

$$M = \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{1}{a_\mu^2}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{1}{a_\nu^2}} = \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1 + \frac{1}{a_\mu^2}}{1 + k^2 a_\mu^2} = \prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \frac{1 + k^2 a_\nu^2}{1 + \frac{1}{a_\nu^2}} \tag{C.154}$$

Einsetzen der Koeffizientenformel C.152 führt zu einer weiteren, bekannten Darstellung des Multiplikators M.

$$M = \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)} \tag{C.155}$$

Beweis. Der Beweis ist nicht schwierig, wenn man $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{\operatorname{cn}^2(\mu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{\operatorname{cn}^2(\nu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k')}} \\
&= \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k') + \operatorname{cn}^2(\mu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \frac{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k') + \operatorname{cn}^2(\nu K'/n; k')}{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k')}} \\
&= \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \frac{1}{\operatorname{sn}^2(\nu K'/n; k')}} = \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)}
\end{aligned}$$

□

C.4.10.9. Das Modul λ'

Das Modul λ kann auf gleichem Wege wie der Multiplikator M bestimmt werden, nur wird dazu der schon bekannte Funktionswert $y = f(1/k; k) = 1/\lambda$ herangezogen, vgl. C.18. Evaluation von Transformationsbeziehung C.151 an dieser Stelle ergibt sofort

$$\lambda = kM \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{1}{k^2 a_\nu^2}}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{1}{k^2 a_\mu^2}} .$$

Wieder sind die Beziehungen $\mathrm{sc}(K' - u; k') = k^{-1}\mathrm{cs}(u; k')$ sowie $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$ gefolgt von Umindizierung im Zähler und Nenner günstig anwendbar, um ausführliche Darstellungen zu entwickeln.

$$\begin{aligned}\lambda &= kM \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} 1 + \mathrm{sc}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} 1 + \mathrm{sc}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)} \\ &= kM \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-2} \mathrm{cn}^2\left(\nu \frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{cn}^2\left(\mu \frac{K'}{n}; k'\right)}\end{aligned}$$

Ausgehend von der Transformationsfunktion nach Gleichung C.153 kann eine weitere bekannte Formel für λ ermittelt werden. Sie bezieht Gleichung C.154 für den Multiplikator M ein und stützt sich (genauso wie bei der ersten elliptischen Haupttransformation, vgl. C.136) auf die vierte Potenz der Koeffizienten a_μ.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= kM \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \frac{1+a_\mu^2}{1+\frac{1}{k^2 a_\mu^2}} \\
&= kM \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \left(k^2 a_\mu^4 \frac{1+\frac{1}{a_\mu^2}}{1+k^2 a_\mu^2} \right) \\
&= M^2 k^n \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} a_\mu^4 \qquad \text{(C.156)} \\
&= M^2 k^n \prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-1} \mathrm{sc}^4\left(\mu \tfrac{K'}{n}; k'\right)
\end{aligned}
$$

C.4.11. Zweite elliptische Haupttransformation, *n* gerade

Da hier genau die gleichen Bedingungen wie für den Fall ungerader Ordnung n gelten (vgl. Abbildung C.18), sind die meisten Beziehungen ähnlich. Einziger Unterschied besteht generell darin, daß der Grad von Zähler- und Nennerpolynom entsprechend angepaßt werden muß.

$$
y = \mathrm{sn}(\tfrac{u}{M}; \lambda) = \frac{x}{M} \cdot \frac{\prod_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} 1+\frac{x^2}{a_\mu^2}}{\prod_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} 1+\frac{x^2}{a_\nu^2}} \qquad \text{(C.157)}
$$

Der Grad des Nennerpolynoms ist n, der des Zählerpolynoms $n-1$, was dazu führt, daß sich die Funktion für $x \to \infty$ der Nullinie nähert. Dieses Verhalten ist auch im zugehörigen Funktionsverlauf nach Abbildung C.20 gut zu erkennen.

Die Koeffizienten bestimmen sich genauso wie für den Fall ungerader Ordnung n, also wie in Formel C.152, zu

$$
x_{\mu} = \mathrm{j}a_\mu = \mathrm{jsc}\left(\mu \tfrac{K'}{n}; k'\right), \qquad \mu = 2,4,6,\ldots,n-2\,.
$$

Gleiches gilt für den Multiplikator M, für den ebenfalls nur der Grad von Zähler und Nenner in Gleichung C.155 zu korrigieren ist.

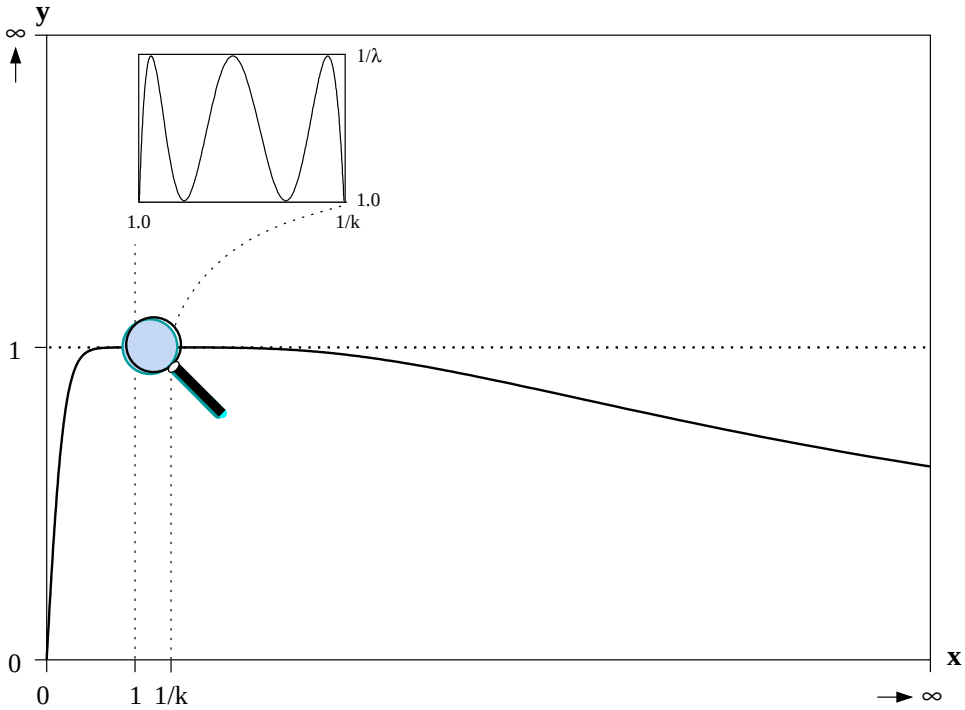


Abbildung C.20.: Zweite elliptische Haupttransformation für $n = 6$

$$M = \frac{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} \operatorname{sn}^2\left(\nu\frac{K'}{n}; k'\right)}{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} \operatorname{sn}^2\left(\mu\frac{K'}{n}; k'\right)}$$

Anders beim Modul λ, welches (im Gegensatz zum Fall des ungeraden n) hier nicht durch Evaluation der rationalen Transformationsbeziehung an der Stelle $x = 1$ ermittelt werden kann. Wegen der jetzt geraden Ordnung n ist der Funktionswert dort nämlich 1 ist und nicht $1/\lambda$ (vgl. Abbildung C.18). Der Wert $1/\lambda$ wird hingegen an den Extremstellen, d. h. bei $u_E = (2\nu+1)K'/n$, $\nu \in \mathbb{Z}$ angenommen. Es ist also naheliegend einfach einen dieser Werte (x_E, y_E) in Beziehung C.157 einzusetzen.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{x_E}{M} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{x_E^2}{a_\mu^2}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{x_E^2}{a_\nu^2}}$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{nd}\left(\frac{K'}{n}; k'\right)}{M} \cdot \frac{\prod\limits_{\mu=2,4,6,\ldots}^{n-2} 1 + \frac{\mathrm{nd}^2(K'/n; k')}{\mathrm{sc}^2(\mu K'/n; k')}}{\prod\limits_{\nu=1,3,5,\ldots}^{n-1} 1 + \frac{\mathrm{nd}^2(K'/n; k')}{\mathrm{sc}^2(\mu K'/n; k')}}$$

C.5. Numerische Berechnungen

C.5.1. Der AGM-Algorithmus

Der Algorithmus des Arithmetisch-Geometrischen Mittelwertes (AGM) stellt eine effiziente Möglichkeit zur numerischen Berechnung des elliptischen Integrals erster Art dar [Cay76, XIII], [Tri48, IV, § 7], [Hur00, II-7, § 6].[54] Er ist eine konsequente Anwendung der Gauss-Transformation von Abschnitt C.4.7.2 auf die elliptische Differentialgleichung C.70 wiefolgt:[55]

$$\frac{1}{1+k} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2\theta}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}} \,. \tag{C.158}$$

Aus der Legendre-Form der elliptischen Differentialgleichung C.70 kann man natürlich auch eine entsprechende Gauss'sche Form ableiten. Dazu sollen zuerst die Darstellungsformen von Formel C.9, C.6, C.7 und C.8 rekapituliert und auf die Ausdrücke der linken und rechten Seite von Gleichung C.158 angewandt werden.

[54] Sowohl C.F. Gauss als auch J. Landen haben sich im 18. Jahrhundert eingehend mit diesem Algorithmus beschäftigt.

[55] Auf eine Indizierung der Größen mit "g" wie in Abschnitt C.4.7.2 wird hier verzichtet.

$$a_1 \frac{\mathrm{d}t_1}{\sqrt{(t_1^2+a_1^2)(t_1^2+b_1^2)}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad t_1 = b_1 \tan\varphi, \qquad k' = \frac{b_1}{a_1}$$

$$a_0 \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2+a_0^2)(t_0^2+b_0^2)}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}}, \qquad t_0 = b_0 \tan\theta, \qquad \lambda' = \frac{b_0}{a_0}$$

Mit dieser Indizierung schreibt sich Differentialgleichung C.70 in der Gauss-Form

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\sqrt{(t_1^2+a_1^2)(t_1^2+b_1^2)}} = \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2+a_0^2)(t_0^2+b_0^2)}}\,. \tag{C.159}$$

Bevor diese wichtige Relation nun bewiesen wird, sollen die Beziehungen zwischen den Moduln k und λ auf der Basis von a_ν und b_ν dargestellt werden.

$$k = \frac{1-\lambda'}{1+\lambda'} = \frac{a_0-b_0}{a_0+b_0} \tag{C.160}$$

Ersetzt man auch auf der linken Seite noch das Modul, so ergibt sich folgende Gleichung.

$$\sqrt{1-\frac{b_1^2}{a_1^2}} = \frac{a_0-b_0}{a_0+b_0}$$

$$\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2} = \frac{(a_0-b_0)^2}{(a_0+b_0)^2}$$

Nach Erweiterung der rechten Seite wiefolgt

$$\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2} = \frac{4(a_0-b_0)^2}{4(a_0+b_0)^2}$$

kann man (durch Vergleich von Zähler und Nenner) die Basisbeziehungen des AGM ableiten.

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{a_0}{2}(1 + \lambda') \tag{C.161}$$

$$a_1^2 - b_1^2 = \left(\frac{a_0 - b_0}{2}\right)^2$$

$$b_1^2 = \left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_0 - b_0}{2}\right)^2 = a_0 b_0 \tag{C.162}$$

Mit diesen Voraussetzungen ist ein Beweis von Differentialgleichung C.159 einfach zu erbringen.

Beweis. Dazu geht man von der LEGENDRE'schen Form in Differentialgleichung C.158 aus.

$$a_1 \frac{\mathrm{d}t_1}{\sqrt{(t_1^2 + a_1^2)(t_1^2 + b_1^2)}} = \frac{a_0}{1+k} \cdot \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}}$$

Der "Multiplikator" $a_0/(1+k)$ in dieser Darstellung ist nun aber genau Eins, was Anwendung von Formel C.161 schnell zeigt (wenn man außerdem das Modul k durch λ' ersetzt).

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t_1}{\sqrt{(t_1^2 + a_1^2)(t_1^2 + b_1^2)}} &= \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{1}{(1+k)} \cdot \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} \\
&= \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{1+\lambda'}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}} \\
&= \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2 + a_0^2)(t_0^2 + b_0^2)}}
\end{aligned}$$

□

Was nun die Beziehung zwischen t_0 und t_1 angeht, so ist sie ja durch die trigonometrische Beziehung C.119 der GAUSS-Transformation festgelegt.

$$
\begin{aligned}
t_0 &= b_0 \tan\theta \\
&= b_0(1+k)\tan\varphi \sqrt{\frac{1+\tan^2\varphi}{1+k'^2\tan^2\varphi}} \\
&= b_0 \frac{2}{1+\lambda'} \cdot \frac{t_1}{b_1} \sqrt{\frac{1+t_1^2/b_1^2}{1+k'^2 t_1^2/b_1^2}} \\
&= \frac{2a_0 b_0}{a_0+b_0} \cdot \frac{a_1 t_1}{b_1^2} \sqrt{\frac{b_1^2+t_1^2}{a_1^2+t_1^2}} \\
&= t_1 \sqrt{\frac{b_1^2+t_1^2}{a_1^2+t_1^2}}
\end{aligned}
\tag{C.163}
$$

Zurück zum eigentlichen Algorithmus läßt sich nun die folgende Iteration durchführen,

$$
a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}, \qquad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i} \tag{C.164}
$$

wobei die Anfangswerte a_0 und b_0 nicht-negative Zahlen (mit $a_0 > b_0$) sein sollen. Dabei nähern sich für $i \to \infty$ beide Werte a_i und b_i einem gemeinsamen Grenzwert,[56] dem sogenannten AGM [Tod84].

$$
\mathrm{M}(a_0, b_0) = \lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i \tag{C.165}
$$

Um diesen Grenzwert zu finden, bildet man zuerst das unbestimmte elliptische Integral

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t_i}{\sqrt{(t_i^2+a_i^2)(t_i^2+b_i^2)}} \tag{C.166}
$$

und kombiniert es mit Relation C.159.

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t_i}{\sqrt{(t_i^2+a_i^2)(t_i^2+b_i^2)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t_{i+1}}{\sqrt{(t_{i+1}^2+a_{i+1}^2)(t_{i+1}^2+b_{i+1}^2)}}. \tag{C.167}
$$

[56] Aus diesem Umstand kann man ein einfaches Abbruchkriterium ableiten.

Die Beziehung zwischen den Integrationsgrenzen ist durch Gleichung C.163 gegeben, d. h. wenn das Integrationsintervall auf der linken Seite von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft, dann geschieht dasselbe auch auf der rechten Seite der Integralgleichung.

Nimmt man das rechtsseitige Integral als Ausgangspunkt für den nächsten Iterationsschritt,[57] so kann man unter Berücksichtigung von Formel C.165 auch schreiben:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{(t_0^2+a_0^2)(t_0^2+b_0^2)}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t_i}{\sqrt{(t_i^2+a_i^2)(t_i^2+b_i^2)}} = \dots \\
&= \lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t_i}{\sqrt{(t_i^2+a_i^2)(t_i^2+b_i^2)}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{[t^2+\mathrm{M}^2(a_0,b_0)][t^2+\mathrm{M}^2(a_0,b_0)]}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\mathrm{M}^2(a_0,b_0)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{M}(a_0,b_0)} \arctan \frac{x}{\mathrm{M}(a_0,b_0)}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\mathrm{M}(a_0,b_0)}.
\end{aligned}$$

Bedenkt man weiterhin, daß der Integrand in Gleichung C.166 eine gerade Funktion ist, kann folgende Integraldarstellung für $\mathrm{M}(a_0,b_0)$ gegeben werden:

$$\mathrm{M}(a_0,b_0) = \frac{\pi}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t^2+a_0^2\right)\left(t^2+b_0^2\right)}}}. \tag{C.168}$$

C.5.2. Vollständiges Elliptisches Integral

Das Vollständige Elliptische Integral K kann ausgehend von Gleichung C.168 ebenfalls mit Hilfe des AGM-Algorithmus' berechnet werden. Dazu wird Gleichung C.168 als vollständiges elliptisches Integral erster Art $\mathrm{K}(k)$ ausgedrückt, indem man wieder Formel C.28 hinzuzieht.

[57] Beziehungsweise interpretiert die Gleichung rückwärts bis hin zu a_0, b_0.

$$\mathrm{M}(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t^2 + a_0^2\right)\left(t^2 + b_0^2\right)}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_0}{\mathrm{K}\left(\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}}\right)} \tag{C.169}$$

Umstellen nach K bedeutet:

$$\mathrm{K}\left(\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_0}{\mathrm{M}(a_0, b_0)} \,.$$

Wählt man nun z. B. $a_0 = 1$, was die Voraussetzung $a_0 > b_0$ erfüllt und setzt $k = \sqrt{1 - b_0^2/a_0^2}$ als Argument, so gilt für $b_0 = \sqrt{1 - k^2} = k'$. Damit berechnet sich das Elliptische Integral erster Art zu:

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{M}(1, k')}, \tag{C.170}$$

was der zugehörige Algorithmus C.1 wiederspiegelt.

Algorithmus C.1 Numerische Berechnung von $\mathrm{K}(k)$ mittels AGM

Require: $\varepsilon > 0$ {Abbruchkriterium}
Require: $k \leq 1$ {Modul}
  $a_0 \Leftarrow 1$
  $b_0 \Leftarrow k'$ $\{k' = \sqrt{1 - k^2}\}$
  $i \Leftarrow 0$

  repeat
    $a_{i+1} \Leftarrow \dfrac{a_i + b_i}{2}$ {AGM}
    $b_{i+1} \Leftarrow \sqrt{a_i b_i}$
    $i \Leftarrow i + 1$
  until $a_i - b_i < \varepsilon$

  $\mathrm{K}(k) \Leftarrow \dfrac{\pi}{a_i + b_i}$

Für die Darstellung von K mit Hilfe des Modulwinkels ϕ, d. h. für $k = \sin\phi$, ist $b_0 = \cos\phi$ zu wählen.

$$\mathrm{K}(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\phi\sin^2\alpha}}$$

Jetzt soll noch kurz auf die Produktdarstellung für K eingegangen werden. Dazu benutzen wir Formel C.94 aus Abschnitt C.4.7.1 im Sinne von $\Lambda = \mathrm{K}(k_{i+1})$, $K = \mathrm{K}(k_i)$ und schreiben als reelle (Viertel-) Periodenbeziehung

$$\mathrm{K}(k_i) = \frac{2}{1+k_i'}\mathrm{K}(k_{i+1}), \qquad k_{i+1} = \frac{1-k_i'}{1+k_i'} < k_i$$

mit dem Ausgangspunkt $\mathrm{K}(k) = \mathrm{K}(k_0)$. Bei einer unendlichen Anzahl von Iterationen wird k Null und wegen Gleichung C.26 gilt:

$$\mathrm{K}(k) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{K}(k_N)\prod_{i=0}^{N-1}\frac{2}{1+k_i'} = \lim_{N\to\infty} 2^N\mathrm{K}(k_N)\prod_{i=0}^{N-1}(1+k_i')^{-1} = \frac{\pi}{2}\prod_{i=0}^{\infty}\frac{2}{1+k_i'}\,.$$

Das heißt, die Zwischenwerte a_i und b_i eines *normalen* AGM könnten zur Berechnung des Produkts verwendet werden, wenn man die Beziehung $k_i' = b_i/a_i$ berücksichtigt.

C.5.3. Unvollständiges Elliptisches Integral

Der Berechnungsalgorithmus für $\mathrm{F}(\varphi; k)$ basiert auf der iterativen Verringerung des Moduls k mit Hilfe der (aufsteigenden) Landen-Transformation von Abschnitt C.4.7.1.[58] Dazu werden ausgehend von $\varphi_0 = \varphi$ und $k_0 = k$ die Formeln C.108, C.111 und C.96 benutzt [Bul65], [HR63].

$$\mathrm{F}(\varphi_i; k_i) = \frac{1+k_{i+1}}{2}\mathrm{F}(\varphi_{i+1}; k_{i+1}) \tag{C.171}$$

$$\tan\varphi_{i+1} = \frac{(1+k_i')\tan\varphi_i}{1-k_i'\tan^2\varphi_i} \tag{C.172}$$

$$k_{i+1} = \frac{1-k_i'}{1+k_i'}$$

[58] Bei gleichzeitiger Vergrößerung der Amplitude φ.

N-malige Anwendung der Gleichung C.171 führt zu

$$\mathrm{F}(\varphi; k) = 2^{-N}\mathrm{F}(\varphi_N; k_N)\prod_{i=1}^{N}(1+k_i)\,. \tag{C.173}$$

Setzt man solange fort bis die Näherung $k_N \approx 0$ akzeptabel wird, dann kann der Spezialfall $\mathrm{F}(\varphi; 0) = \varphi$ nach Formel C.12 herangezogen werden

$$\mathrm{F}(\varphi_N; k_N) \approx \mathrm{F}(\varphi_N; 0) = \varphi_N\,.$$

Einsetzen in Gleichung C.173 ergibt letztlich:

$$\mathrm{F}(\varphi; k) = 2^{-N}\varphi_N\prod_{i=1}^{N}(1+k_i)\,.$$

Wegen der Periodizität des Tangens ist man vom Argument φ her zunächst auf das Intervall $[-\pi/2, +\pi/2]$ beschränkt. Hier kann man sich jedoch mit Reduktionsformel C.15 helfen, wobei dann allerdings die Berechnung von $\mathrm{K}(k)$ mit Hilfe des AGM unumgänglich wird.

Praktisch wird allerdings fast immer der AGM-Algorithmus (vgl. Abschnitt C.5.1) in Verbindung mit Gleichung C.7 implementiert, um das unvollständige elliptische Integral $\mathrm{F}(\varphi; k)$ numerisch zu bestimmen. Dazu ist nur Gleichung C.172 anzupassen,

$$\begin{aligned}\tan\varphi_{i+1} &= \frac{\left(1+\frac{b_i}{a_i}\right)\tan\varphi_i}{1-\frac{b_i}{a_i}\tan^2\varphi_i}\\ &= \frac{(a_i+b_i)\tan\varphi_i}{a_i-b_i\tan^2\varphi_i}\end{aligned}$$

denn die Modultransformation wird ja direkt durch das AGM realisiert.

In diesem Zusammenhang kommt für die Berechnung von φ_i auch häufig Gleichung C.109 in der Form

$$\begin{aligned}\tan(\varphi_{i+1}-\varphi_i) &= k_i'\tan\varphi_i\\ &= \frac{b_i}{a_i}\tan\varphi_i\end{aligned}$$

zur Anwendung.

C.5.4. Elliptischer Sinus

Wendet man die Gauss-Transformation entsprechend Gleichung C.113 zur Berechnung von $\mathrm{sn}(u;k) = \mathrm{sn}(u_0;k_0)$ in der Form

$$\mathrm{sn}(u_i;k_i) = \frac{(1+k_{i+1})\mathrm{sn}(u_{i+1};k_{i+1})}{1+k_{i+1}\mathrm{sn}^2(u_{i+1};k_{i+1})} \tag{C.174}$$

$$u_{i+1} = \frac{u_i}{1+k_{i+1}}, \qquad k_{i+1} = \frac{1-k_i'}{1+k_i'} < k_i \tag{C.175}$$

an (vgl. [Bul65], [HR63]), so führt dies für $k < 1$ letztlich zu einem Modul $\lim_{i\to\infty} k_i = 0$. Bricht man den Vorgang nach N Iterationen ab, so gilt:[59]

$$u_N = \frac{u_0}{(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_{N-1})(1+k_N)} = u_0 \prod_{i=1}^{N}(1+k_i)^{-1} .$$

Mit $k_N \approx 0$ kann man für $\mathrm{sn}(u_N;k_N)$ nun folgendermaßen nähern:[60]

$$\mathrm{sn}(u_N;k_N) \approx \mathrm{sn}(u;0) = \sin u .$$

Nach Ermittlung von u_N kann man durch inverse Interpretation ($i = N\ldots 0$) der Abstiegsgleichung C.174 rückwärts $\mathrm{sn}(x_0;k_0) = \mathrm{sn}(x;k)$ berechnen.

$$\mathrm{sn}(u_{i-1};k_{i-1}) = \frac{(1+k_i)\mathrm{sn}(u_i;k_i)}{1+k_i\mathrm{sn}^2(u_i;k_i)}$$

[59] Effiziente Implementierungen greifen hier fast immer auf die Zwischenwerte des AGM (vgl. Abschnitt C.5.1) zurück, um k_{i+1} nach Formel C.160 zu bestimmen.

[60] Nach [Pev92] ist der Fehler $|\mathrm{sn}(x_N;k_N) - \mathrm{sn}(x;0)| < \frac{\pi}{4}k^2$.

Das Modul k_i kann hierfür äquivalent zu Formel C.102 in jedem Schritt rückwärts berechnet werden.[61]

$$k_i = 2\frac{\sqrt{k_{i+1}}}{1+k_{i+1}}$$

Nach [Pev92] ist der absolute Gesamtfehler des Verfahrens kleiner als $\mathrm{K}(k)\, k_N^2/2$.

[61] Da die Werte k_i eigentlich schon von der absteigenden Iteration bekannt sind, kann auf die Neuberechnung verzichtet werden, wenn man den zusätzlich nötigen Speicherplatz akzeptiert.

Algorithmus C.2 Numerische Berechnung von $x = \mathrm{sn}(u; k)$

Require: $\varepsilon > 0$ {Abbruchkriterium}
Require: $k \leq 1$ {Modul}
  $x_0 \Leftarrow x$
  $k_0 \Leftarrow k$
  $a_0 \Leftarrow 1$
  $b_0 \Leftarrow k'$
  $i \Leftarrow 0$

  while $k_i > \varepsilon$ **do**
    $k_{i+1} \Leftarrow \dfrac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$
    if $k_{i+1} \geq k_i$ **then** {Konvergenzproblem?}
      if $k_{i+1} > 1/2$ **then** {Fall $k = 1$}
        $x \Leftarrow \tanh u$
      else {Fall $k = 0$}
        $x \Leftarrow \sin u$
      end if
      return
    end if

    $x_{i+1} \Leftarrow \dfrac{x_i}{1 + k_{i+1}}$ {Gleichung C.175}
    $a_{i+1} \Leftarrow \dfrac{a_i + b_i}{2}$ {AGM}
    $b_{i+1} \Leftarrow \sqrt{a_i b_i}$
    $i \Leftarrow i + 1$
  end while

  $x_i \Leftarrow \sin x_i$ $\{\mathrm{sn}(x_N; k_N) \approx \mathrm{sn}(x_N; 0) = \sin u_N\}$

  repeat
    $x_{i-1} \Leftarrow \dfrac{(1 + k_i) x_i}{1 + k_i x_i^2}$ {Gleichung C.174}
    $i \Leftarrow i - 1$ {Rückwärts-Rechnung}
  until $i = 0$

  $x \Leftarrow x_0$

D. Funktionentheorie – Analytische Funktionen

D.1. Differentiation

D.1.1. Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

Holomorphe bzw. analytische Funktionen[1] sind solche, deren Grenzwert

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{D.1}$$

existiert und eindeutig ist, die also an der Stelle z differenzierbar sind. Man fordert hierbei nicht unbedingt, daß $f(z)$ für *alle* z einen solchen Grenzwert hat – man kann sich auch auf ein bestimmtes Gebiet beschränken[2]. Die "Einwertigkeit" des Grenzwertes (*One-Valued*) spielt auf Funktionen an, bei denen er davon abhängt, aus welcher Richtung man sich nähert. Er kann sogar dann existieren, wenn der Funktionswert selbst nicht existiert (wie z. B. $\sin z/z$ an der Stelle $z = 0$). Nicht analytisch sind unter anderen die Funktionen $1/(z-a)$ bei a oder auch $\log z$ für $z = 0$.

Eine Schlußfolgerung von B. Riemann in Bezug auf die "Einwertigkeit" des Differentialquotienten (nach Gleichung D.1) der analytischen Funktion $f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y)$ mit $z = x + \mathrm{j}y$ war, daß bei Annäherung in x-Richtung, also bei konstantem y (horizontal) der gleiche Grenzwert gelten muß, wie bei Annäherung aus y-Richtung (bei konstantem x, also vertikal)[3].

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{\partial f(z)}{\partial(\mathrm{j}y)} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= -\mathrm{j}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{D.2}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen[4]

[1] In der komplexen Analysis nennt man eine Funktion analytisch, wenn sie durch eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ dargestellt werden kann [Hur00, II-3]. Da jede holomorphe Funktion auch analytisch ist, werden beide Begriffe oft äquivalent gebraucht.

[2] Eine Funktion $f(z)$, die auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch ist und im Endlichen keine Singularität besitzt, nennt man *ganze* Funktion (typische Vertreter sind Kreis-, Exponential- und Hyperbelfunktionen) [Hur00, I-3, § 8].

[3] Ein exakter Beweis wird ausgehend von der Definition des Differentialquotienten in [BC03] und [WW27, § 5·1] geführt.

[4] Sie sind eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit von $f(z)$ an der Stelle z.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{D.3}$$

und wegen der Unabhängigkeit des Grenzwertes von jedweder Annäherungsrichtung ($\mathrm{d}f/\mathrm{d}z = \partial f/\partial x = \partial f/\partial(\mathrm{j}y)$) außerdem

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \mathrm{j}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{D.4}$$

bzw.

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = -\mathrm{j}\frac{\partial f(z)}{\partial y}\,. \tag{D.5}$$

D.1.2. Harmonische Funktionen

Differenziert man beide Teile der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen D.3 jeweils nach x und y

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\,\partial y} \qquad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y\,\partial x}$$

und addiert/subtrahiert sie daraufhin diagonal, so erhält man (wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von partiellen Ableitungen, Satz von Schwarz):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0\,.$$

Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen sind harmonische bzw. Potentialfunktion, d. h. sie genügen den LAPLACE-Gleichungen $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Außerdem ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}[f'(z)] = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}[f'(z)] \qquad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}[f'(z)] = -\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im}[f'(z)]$$

auch $f'(z)$ und jede weitere Ableitung wieder analytisch.

D.1.3. Funktionaldeterminante analytischer Funktionen

Nimmt man $f(z)$ als Abbildung des Vektors $\mathbf{z} = (x,y)^{\mathrm{T}}$ auf $\mathbf{f} = (u,v)^{\mathrm{T}}$ wahr, dann ist oftmals die Funktionaldeterminante (JACOBI-Determinante) von besonderem Interesse[5]. Gerade für analytische Funktionen hat sie eine sehr einfache Lösung, welche sich ebenfalls aus den CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen ableitet.

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|f'(z)\right|^2$$

Eine Schlußfolgerung ist die, daß für alle Punkte z der komplexen Ebene, an denen $f'(z)$ eine Wert ungleich Null hat, die Funktionaldeterminante nicht verschwindet[6]. Sollte $f'(z)$ in der Umgebung von z außerdem noch stetig sein, dann existiert eine (eindeutige) Umkehrfunktion $z = \psi(f)$ für alle $f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[5] Beispielsweise bei Koordinatentransformationen, Flächen- und Volumenintegralen, also Anwendungen die mit infinitesimalen Flächenelementen der Art $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ rechnen.

[6] Eine Funktion f wird auch als *regulär* bezeichnet, wenn die Funktionaldeterminante nicht verschwindet.

D.1.4. Die Funktion $(z - z_0)^n$

Besondere Bedeutung für viele Beweise der komplexen Analysis hat die Funktion $(z-z_0)^n$. Hier soll einmal mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen deren Holomorphiegebiet bestimmt werden[7]. Wir gehen dazu von Gleichung D.2 aus und bilden die partiellen Ableitungen nach x und y. Zur Vereinfachung soll die Exponentialdarstellung $z - z_0 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ verwendet werden, wobei berücksichtigt werden muß, daß eigentlich $r := r(x,y)$ und $\theta := \theta(x,y)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(z-z_0)^n &= \frac{\partial}{\partial x} r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta} \\
&= nr^{n-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}\frac{\partial r}{\partial x} + r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}\,\mathrm{j}n\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= nr^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \\
&= n(z-z_0)^n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Für die Ableitung nach y gibt es bis hierher keinen Unterschied, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial y}(z-z_0)^n = n(z-z_0)^n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathrm{j}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right).$$

Setzen wir jetzt (kurz) $z_0 = 0$ und erarbeiten die Zusammenhänge zwischen den Differentialen der arithmetischen und der Exponentialform für $z = x + \mathrm{j}y = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$. Dazu soll von den bekannten Formeln

$$r = |z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2+y^2} \qquad\qquad \theta = \measuredangle z = \arctan\frac{y}{x}$$

ausgegangen und dann die Ableitungen gebildet werden.

[7] Meist wird dieser ausführliche Weg aus Aufwandsgründen gemieden, obwohl er eine gute Übung darstellt.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}$$

Jetzt können die so gewonnenen Ausdrücke eingesetzt werden, was mit $z_0 = x_0 + \mathrm{j}y_0$ zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z-z_0)^n &= n(z-z_0)^n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\\ &= n(z-z_0)^n\left(\frac{x-x_0}{r^2} - \mathrm{j}\frac{y-y_0}{r^2}\right)\\ &= \frac{n}{r^2}(z-z_0)^n(z-z_0)^* = n(z-z_0)^{n-1}\end{aligned}$$

führt[8]. Ähnlich wird mit der Ableitung nach y verfahren, nur das gedanklich noch der Zwischenschritt der Substitution nach $\mathrm{j}y$ auszuführen ist.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(\mathrm{j}y)}(z-z_0)^n &= n(z-z_0)^n\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \mathrm{j}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\\ &= n(z-z_0)^n\left(\frac{x-x_0}{r^2} - \mathrm{j}\frac{y-y_0}{r^2}\right)\\ &= \frac{n}{r^2}(z-z_0)^n(z-z_0)^* = n(z-z_0)^{n-1}\end{aligned}$$

Schlußfolgerung: $(z-z_0)^n$ ist für positives n an jeder Stelle z analytisch, denn es gilt Gleichung D.2 in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial z}(z-z_0)^n = n(z-z_0)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}(z-z_0)^n = \frac{\partial}{\partial(\mathrm{j}y)}(z-z_0)^n\,.$$

Für den Fall $n < 0$ ist $f(z)$ jedoch nur für $z \neq z_0$ analytisch, denn beide Seiten der vorangegangenen Äquivalenz sind sonst unbestimmt. Ein sich daraus ergebendes Resultat, welches in Abschnitt D.3 bewiesen wird, ist:

[8] Wobei $(z-z_0)(z-z_0)^* = r^2$ berücksichtigt wurde.

$$\oint_C (z-z_0)^n \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi\mathrm{j} & (n = -1) \end{cases} .$$

D.2. Integration

D.2.1. Satz von Cauchy

D.2.1.1. Stammfunktion

Für eine analytische Funktion $f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y)$ ist die Existenz einer Stammfunktion $F(z) = U(x,y) + \mathrm{j}V(x,y)$ mit $F'(z) = f(z)$ dann gegeben, wenn die Integrabilitätsbedingung nach Gleichung D.3 erfüllt und außerdem die partiellen Ableitungen stetig sind. Der erste Teil der Behauptung ist zu verifizieren, indem man mit $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{j}\,\mathrm{d}y$ eine formale Zerlegung von $F(z)$ in Real- und Imaginärteil vornimmt [WW27, § 4·6].

$$\begin{aligned} F(z) &= \int f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int [u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y)]\,(\mathrm{d}x + \mathrm{j}\,\mathrm{d}y) \\ &= \int \underbrace{u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}U} + \mathrm{j}\int \underbrace{u(x,y)\,\mathrm{d}y + v(x,y)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}V} \end{aligned} \tag{D.6}$$

Erinnern wir uns nun an die Aussage von Abschnitt D.1.2, daß die Ableitung einer analytischen Funktion auch wieder analytisch ist, so gilt Gleichung D.4 in der Form

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y) = F'(z) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} - \mathrm{j}\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

und äquivalent dazu:

$$u(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \qquad v(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} . \tag{D.7}$$

Mit diesen einfachen Resultaten kann man die Integranden in Formel D.6 als Differentialformen[9] in $\mathbb{R}^2$ ausdrücken.

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \qquad\qquad \mathrm{d}V = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{D.8}$$

Aus der Differential- und Integralrechnung mehrerer Veränderlicher (sowie Verallgemeinerungen wie der Vektoranalysis oder Differentialgeometrie) ist nun bekannt, daß für die totalen Differentiale $\mathrm{d}U$ und $\mathrm{d}V$ genau dann Stammfunktionen existieren, wenn $U_{xy} = U_{yx}$ bzw. $V_{xy} = V_{yx}$ gilt. Diese Bedingung ist für stetige Funktionen aber grundsätzlich (Satz von Schwarz) und für harmonische Funktionen erst recht erfüllt.

D.2.1.2. Bestimmtes Integral

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existiert eine Verbindung zwischen der Stammfunktion und dem bestimmten Integral, welche unter bestimmten Bedingungen auch im komplexen Fall Gültigkeit hat [BC03, 42].

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{a+\mathrm{j}b}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(z)$$

Anders als im eindimensionalen Fall muß man berücksichtigen, daß bei der Integration zwischen zwei Punkten ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) der Integrationsweg eine Rolle spielen kann. Ist er in Parameterform als $z = x + \mathrm{j}y = \varphi(t)$ darstellbar, so gilt mit $\mathrm{d}z = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ für das Kurvenintegral (zweiter Art) allgemein:

$$F(z) = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Sollte $f(z)$ aber analytisch auf der Kurve C sein[10], dann ist das Integral wegunabhängig und man kann in gewohnter Art und Weise

[9] Totales Differential, welches für eine infinitesimale Änderung der Variablen x, y die resultierende Änderung $\mathrm{d}U$ bzw. $\mathrm{d}V$ beschreibt.

[10] Man sagt auch, die Funktion $f(z)$ muß auf dem Integrationsweg (der vollständig in einem einfach zusammenhängenden Gebiet verlaufen muß, Nebenbedingung) stetig differenzierbar sein.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1) \tag{D.9}$$

rechnen [BC03, 42]. Eine anschauliche Begründung steckt in den Beziehungen $U_{xy} = U_{yx}$ bzw. $V_{xy} = V_{yx}$, denn sie weisen auf infinitesimaler Ebene (im Sinne des RIEMANN'schen Differentialbegriffs) daraufhin, daß die "Fortschrittsrichtung" oder -Reihenfolge vollkommen unerheblich ist. Exakt kann die Wegunabhängigkeit z. B. mit Hilfe der Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher bewiesen werden[11]. Dazu gehen wir von der Parameterdarstellung $z = \psi(t) + \mathrm{j}\phi(t)$ für den Integrationsweg C aus, bilden in einem zweiten Schritt die Ableitungen von U bzw. V nach t und ersetzen anschließend die (entstehenden) partiellen Ableitungen durch $u(x,y)$ und $v(x,y)$ unter Zuhilfenahme von Beziehung D.7.

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t) &= U\left[\psi(t), \phi(t)\right] & \hat{V}(t) &= V\left[\psi(t), \phi(t)\right] \\
\frac{\mathrm{d}\hat{U}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\psi'(t) + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\phi'(t) & \frac{\mathrm{d}\hat{V}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}\psi'(t) + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\phi'(t) \\
\hat{U}'(t) &= u(x,y)\psi'(t) - v(x,y)\phi'(t) & \hat{V}'(t) &= v(x,y)\psi'(t) + u(x,y)\phi'(t)
\end{aligned}$$

Die letzten Ausdrücke stellen genau die Differentialformen in Formel D.6 dar, was uns zum Ende des Beweises bringt.

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_C \left[u(x,y)\psi'(t) - v(x,y)\phi'(t)\right]\,\mathrm{d}t & V(x,y) &= \int_C \left[u(x,y)\psi'(t) + v(x,y)\phi'(t)\right]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \hat{U}'(t)\,\mathrm{d}t & &= \int_{t_1}^{t_2} \hat{V}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \hat{U}(t_2) - \hat{U}(t_1) & &= \hat{V}(t_2) - \hat{V}(t_1) \\
&= U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1) & &= V(x_2,y_2) - V(x_1,y_1)
\end{aligned}$$

Ist die Kurve C sogar geschlossen, d. h. z_2 nähert sich wieder z_1, dann kommt man zum Hauptsatz der Funktionentheorie bzw. Satz von CAUCHY [WW27, § 5·2], [Hur00, I-5, § 6], [BC03, 44-46]:

Ist f eine Funktion von z, analytisch[12] an allen Punkten auf und innerhalb der ge-

[11] Ein Beweis des Satzes von CAUCHY mit Mitteln der Vektoranalysis ist in [Cau54, II-5] zu finden.
[12] Voraussetzung ist eigentlich nur, daß $f(z)$ innerhalb und auf C kontinuierlich ist (vgl. Anmerkungen und Beweis

schlossenen Kurve C, dann gilt:

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,. \tag{D.10}$$

Sollte $f(z)$ im Inneren von C nicht überall analytisch sein, dann kann das geschlossene Kurvenintegral einen Wert ungleich Null besitzen (siehe dazu Abschnitt D.3).

Damit sind uns nunmehr drei gleichwertige Kriterien für den Nachweis, daß es sich bei $f(z)$ um eine analytische Funktion handelt, bekannt:

1. die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen,
2. die Laplace-Gleichung für den Real- und Imaginärteil und
3. der Satz von Cauchy (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrales[13]).

D.2.2. Cauchy's Integralformel

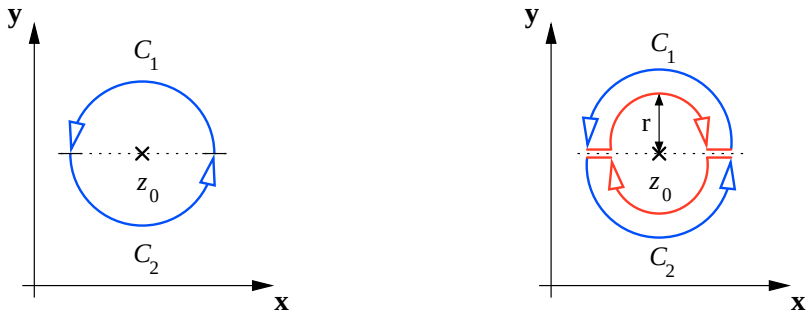
Als ein Resultat des Satzes von Cauchy kann man jeden Wert $f(z)$, wobei die Funktion f in der Umgebung von z analytisch sei, durch ein Kurvenintegral ausdrücken. Dazu definiert man einfach $f(z)/(z-z_0)$ als neue Funktion, welche im Punkt z_0 nicht analytisch ist, und integriert auf einer den Punkt z_0 einschließenden Kurve. Da sich der Integralsatz von Cauchy nur auf Funktionen anwenden läßt, die im Inneren der Kurve C analytisch sind, umgehen wir diese Widrigkeit wie in Abbildung D.1 dargestellt. Dabei wird die Kurve C zuerst in zwei halbkreisförmige Teilkurven C_1 und C_2 nach Teilbild D.1a zerlegt.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

Danach werden C_1 und C_2 entsprechend Abbildung D.1b separiert und als Kurven so geschlossen, daß jede für sich analytisch ist. Außerdem sollen sich beide Kurven aus dem originalen Stück des äußeren Halbkreises, bezeichnet mit C_1' bzw. C_2' sowie dem inneren Halbkreis (inklusive der waagerechten Teilstücke) C_1'' bzw. C_2'' zusammensetzen. Dann gilt nach Cauchy's Integralsatz D.10:

in [WW27, § 5·2]).

[13] Der Beweis der umgekehrten Behauptung, nämlich daß ein Verschwinden des Integrals auf eine analytische Funktion schließen läßt, wird Satz von Morera genannt [Kör88, 75], [FB00, II-3.5].



(a) Offene Kurven (b) Geschlossene Kurven

Abbildung D.1.: Integrationswege zur Herleitung von Cauchy's Integralformel

$$\oint_{C_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{C'_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \text{mit } \nu = 1,2$$

und deshalb

$$\int_{C'_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = -\int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\,.$$

Mit der Substitution

$$z - z_0 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{j}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \tag{D.11}$$

kann man für jeden der Integralausdrücke auf den inneren Kurven

$$\int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \mathrm{j}\int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}} r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{j}\int_{C''_\nu} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

schreiben. Lassen wir jetzt den Radius r gegen Null gehen, d. h. betrachten den Wert auf C''_ν in der Umgebung von z_0:

$$\lim_{r\to 0} \mathrm{j}\int_{C''_\nu} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{j}\int_{C''_\nu} f(z_0)\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{j}\,f(z_0)\,\theta|_{C''_\nu}\,.$$

Da sich die Integrale auf dem analytischen Teil der "glattgezogenen" Kurven C''_ν wegen der entgegengesetzten Richtung kompensieren, ergibt sich schlußendlich:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1'} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2'} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\ &= -\mathrm{j}\, f(z_0)\left(\theta|_{C_1''} + \theta|_{C_2''}\right) \\ &= -\mathrm{j}\, f(z_0)(-2\pi - 0) = 2\pi\mathrm{j}\, f(z_0)\,.\end{aligned}$$

Ein ausschließlich rechnerischer Beweis ist folgendermaßen zu erbringen:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + f(z_0)\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}\end{aligned}$$

Der erste Summand stellt für $z \to z_0$ eine hebbare Singularität dar (vgl. Abschnitt D.4), d. h. der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z)$$

existiert. Damit ist der Integrand eine analytische Funktion für $z \to z_0$ und wegen des Satzes von Cauchy das Integral

$$\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Der zweite Summand ist mit der Substitution D.11

$$f(z_0)\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \mathrm{j}\, f(z_0)\oint_C \mathrm{d}\theta = \mathrm{j}\, f(z_0)\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{j}\, f(z_0) \tag{D.12}$$

und somit

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\, f(z_0)\,. \tag{D.13}$$

Benennt man noch die Variablen um ($z_0 := z$ und $z := \xi$), dann erhält man die Cauchy'sche Integralformel [BC03, 47].

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \tag{D.14}$$

Bei der Interpretation fällt sofort die bemerkenswerte Eigenschaft einer analytischen Funktion (innerhalb von C) auf, daß der Funktionswert $f(z_0)$ eindeutig durch die Randwerte auf der Kurve C bestimmt ist.

D.2.3. Integralformel für Ableitungen

Die (erste) Ableitung einer analytischen Funktion kann man auch durch ein Kurvenintegral in der komplexen Ebene ausdrücken [WW27, § 5·22]. Um dies nachzuweisen, soll zuerst Cauchy's Integralformel D.14 in die Definition der ersten Ableitung einer Funktion f an der Stelle z (D.1) eingesetzt werden.

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} \mathrm{d}\xi - \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \right]$$

Nun werden die Argumente beider Integrale auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, dann im Zähler ausmultipliziert und zuletzt der Grenzwert aufgelöst[14].

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \oint_C \frac{f(\xi)(\xi - z) - f(\xi)(\xi - z - h)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \lim_{h\to 0} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z)} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Der so gewonnene Ausdruck

[14] Ein in mathematischer Strenge geführter Beweis, der auch die Kurve C eingehend berücksichtigt, ist in [WW27, § 5·22] zu finden.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, \mathrm{d}\xi \tag{D.15}$$

ermöglicht die Berechnung der Ableitung von f an jeder Stelle z durch ein Kurvenintegral. Voraussetzung dafür ist nur, daß der Punkt z in der komplexen Ebene von einem Integrationsweg eingeschlossen wird, auf deren Rande und in dessen Inneren $f(z)$ analytisch ist.

Durch erneute Anwendung der obigen Formeln kann man zur zweiten Ableitung $f''(z)$ gelangen [WW27, § 5·22].

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} \, \mathrm{d}\xi$$

Für weitere Ableitungen ergibt sich in der Fortsetzung die Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi, \tag{D.16}$$

welche durch vollständige Induktion beweisbar ist. Sie führt zu der wesentlichen Schlußfolgerung, daß eine analytische Funktion beliebig oft differenziert werden kann[15].

Für den speziellen Fall, daß C ein Kreis mit Radius r um z ist, kann man Beziehung D.16 konkretisieren. Dazu ist die Substitution $\xi - z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ und daraus abgeleitet $\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\theta = \mathrm{j}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ wieder hilfreich.

[15] Unter der immer gegebenen Voraussetzung, daß die Integrationskurve C so nah bei z liegt, daß sie in einem einfach zusammenhängenden Gebiet verläuft.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{j}} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right)}{r^{n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n+1)\theta}} \mathrm{j} r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{D.17}$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f\left(z + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \mathrm{d}\theta \tag{D.18}$$

In letzter Formel (D.18) wird die sogenannte Mittelwerteigenschaft von $f(z)$ bei der Integration auf dem umschließenden Kreis deutlich.

D.3. LAURENT-Reihe

Bei der LAURENT-Reihenentwicklung wird davon ausgegangen, daß sich die komplexwertige Funktion $f(z)$ um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine unendliche Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{D.19}$$

entwickeln läßt [WW27, § 5·6, 6·1], [BC03, 55]. Integriert man $f(z)$ auf der Kurve C um z_0, wobei

- $f(z)$ innerhalb C analytisch sein muß
- und C ein Kreis mit möglichst kleinem Radius sein soll,

dann ergibt sich mit der Darstellung[16]

$$f(z) = \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \underbrace{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots}_{\Phi(z)} \tag{D.20}$$

für das Integral

[16] Die Funktion $\Phi(z)$ entspricht der TAYLOR-Reihenentwicklung (Potenzreihe) einer reellen Funktion [BC03, 53].

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{-2}\left[\oint_C a_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z\right] + \oint_C a_{-1}(z-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}z + \oint_C \Phi(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Die Funktion $\Phi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, der sogenannte Regulärteil, ist analytisch, weshalb dieses Integral verschwindet. Gleiches gilt für das Integral über den Hauptteil (ohne a_{-1}) der LAURENT-Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}\oint_C \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z = 0,$$

was sich ausgehend von Substitutionsformel D.11 nachweisen läßt.

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{\mathrm{j}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{j}r^{-(n-1)}\oint_C \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n-1)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{(n-1)r^{n-1}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n-1)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{für } n \neq 1\end{aligned}$$

Es bleibt also nur das Integral über $a_{-1}(z-z_0)^{-1}$ übrig, dessen Wert nach CAUCHY's Integralformel D.13 genau $2\pi\mathrm{j}\,a_{-1}$ ist[17]. Den Koeffizienten a_{-1} nennt man das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0 und kürzt ihn (meist) mit $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$ ab.

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{a_{-1}}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,a_{-1} = 2\pi\mathrm{j}\,\operatorname{res}_{z_0} f(z) \tag{D.21}$$

Wie bestimmen sich nun aber die anderen Koeffizienten a_n? Zur Beantwortung dividieren wir einfach Gleichung D.20 durch $(z-z_0)^{n+1}$.

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \cdots + a_{n-1}(z-z_0)^{-2} + a_n(z-z_0)^{-1} + a_{n+1} + a_{n+2}(z-z_0) + a_{n+3}(z-z_0)^2 + \cdots$$

Integration über die neu gebildete Funktion $(z-z_0)^{-(n-1)}f(z)$ hat dieselbe Konsequenz wie vor-

[17] Die Funktion $f(z)$ in der Integralformel D.13 von CAUCHY wird hier durch $f(z) := a_{-1}$ repräsentiert.

dem – es bleibt nur der Term mit dem Exponenten -1 übrig, d. h. sowohl Haupt- als auch Regulärteil verschwinden wieder.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,a_n$$

Durch Kombination der Beziehungen kann man für die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{Z}$) jetzt eine gemeinsame Berechnungsvorschrift angeben.

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \tag{D.22}$$

Aus vorangegangener Formel ist der Zusammenhang zwischen Holomorphie und Analytizität einer komplexen Funktion $f(z)$ erklärbar. Nehmen wir dazu an, daß $f(z)$ in z_0 holomorph ist – dann

- verschwinden alle Koeffizienten a_i mit negativem Index (Satz von Cauchy, Formel D.10);
- entsprechen die mit positivem Index genau den Koeffizienten einer Taylor-Reihe (bzw. MacLaurin-Reihe im Komplexen, vgl. [BC03, 53]), wenn man Beziehung D.16 berücksichtigt[18].

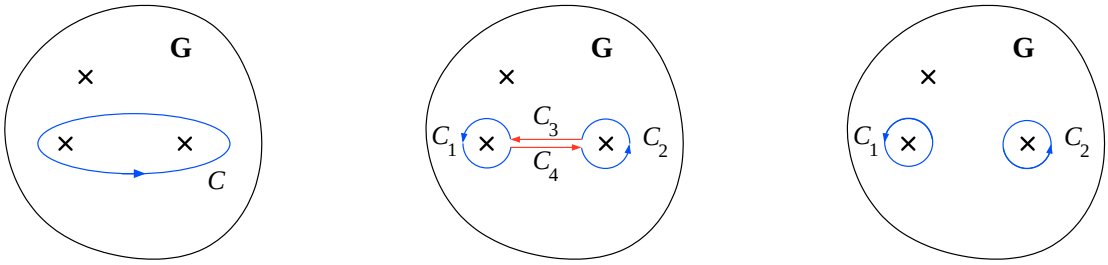
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}} \displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & (n \geq 0) \\ \dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}} \displaystyle\oint_C f(z)\,(z-z_0)^{|n|-1}\,\mathrm{d}z = 0 & (n < 0) \end{cases} \tag{D.23}$$

Die Laurent-Reihe entartet in diesem Sinne zu einer Potenzreihe, woraus folgt, daß die Funktion $f(z)$ analytisch ist. Sollte $f(z)$ im Punkt z_0 dagegen nicht holomorph sein, dann haben wir es mit einer Singularität zu tun, d. h. ihre Laurent-Reihe ist von der Taylor-Reihe verschieden. Welche Fälle dabei zu unterscheiden sind, stellt der folgende Abschnitt dar.

D.4. Residuensatz

Der Residuensatz ist eine logische Fortführung bzw. Anwendung der Erkenntnisse des vorigen Abschnittes, in welchem der Begriff des Residuums erstmalig auftauchte [FB00, III-6]. Er er-

[18] Für die Existenz der Reihenentwicklung ist Voraussetzung, daß $f(z)$ beliebig oft differenzierbar ist.



(a) Ausgangssituation (b) Zwischenschritt (c) Ergebnis

Abbildung D.2.: Eingeschlossene Singularitäten

möglicht die einfache Berechnung von (geschlossenen) Kurvenintegralen, wenn innerhalb des Integrationsweges ein oder mehrere Singularitäten von $f(z)$ liegen[19].

Einleitend müssen wir uns aber mit der Frage befassen, wie sich der Einschluß *mehrerer* singulärer Punkte auf den Wert des umlaufenden Integrals auswirkt. Dazu soll im Beispiel nach Abbildung D.2a um zwei solcher Punkte auf dem (geschlossenen) Weg C integriert werden [Mar95, 10.3].

Ist die Funktion $f(z)$ außer an den Singularitäten und insbesondere auf C analytisch, dann kann man den Integrationsweg entsprechend Abbildung D.2b verändern[20]. Eine solche Wahl des Integrationsweges C führt dazu, daß sich die Kurvenintegrale über C_3 und C_4 aufheben, also

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\,\mathrm{d}z}_{0}$$

gilt. Dieser Umstand ist graphisch in Abbildung D.2c dargestellt und kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Umschließt ein Kurvenintegral auf seinem Weg n Singularitäten, dann kann dessen Wert durch separate Integration um alle n singulären Punkte bestimmt werden[21].

[19] Insbesondere Gleichung D.21 zeigt deutlich, daß die Kenntnis des Residuums $\operatorname{res}_{z_0} f(z) := a_{-1}$ sehr hilfreich bei der Berechnung von $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ sein kann.

[20] Dieser Fakt ist nur indirekt mit der Wegunabhängigkeit erklärbar (da im Inneren von C Singularitäten liegen), exakter müßte man sich auf den sogenannten Deformationssatz berufen [Nee97, 8-VI].

[21] Ein einfach zusammenhängendes Gebiet G nach Abbildung D.2 vorausgesetzt.

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_n \left[\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right] \tag{D.24}$$

Entwickelt man jetzt die Funktion $f(z)$ um die einzelnen Singularitäten herum zu einzelnen LAURENT-Reihen, so kann man mit Hilfe von Gleichung D.21 den Residuensatz formulieren.

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j} \sum_n \mathrm{res}_{z_n} f(z) \tag{D.25}$$

Wie berechnet man jedoch das Residuum an einem (isolierten) singulären Punkt ohne Kenntnis der LAURENT-Reihenentwicklung von $f(z)$? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir (die) drei Typen von Singularitäten z_n, welche sich durch die Art des Hauptteils $h(z)$ der LAURENT-Reihe von $f(z)$ unterscheiden [FB00, III-4.10].

D.4.1. Hebbare Singularitäten

Hebbare Singularitäten sind solche, für die $f(z)$ in der Umgebung von z_0 beschränkt (und in z_0 analytisch) ist [FB00, III-4.2]. Der RIEMANN'sche Hebbarkeitsatz formuliert die Eigenschaft folgendermaßen:

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z) = 0\,. \tag{D.26}$$

Existiert für $f(z)$ aufgrund der Holomorphieeigenschaft in z_0 die Ableitung $f'(z_0)$ und $f(z_0)$ ist beschränkt ($\lim_{z\to z_0} |f(z)| < \infty$), so verschwindet wegen des Satzes von CAUCHY der Hauptteil $h(z)$ gänzlich und es gilt $\mathrm{res}_{z_0} f(z) = 0$. Ein typischer Vertreter dieser Klasse von Singularitäten ist die Stelle $z_0 = 0$ der Spaltfunktion[22] $f(z) = \sin z/z$.

D.4.2. Pole

Singularitäten, bei denen man von einem Pol der Ordnung n spricht (ein- oder mehrfacher Pol), sind durch den endlichen Hauptteil

[22] Die TAYLOR-Reihenentwicklung der Spaltfunktion stimmt genau mit der LAURENT-Reihe (die deshalb nur einen Regulärteil besitzt) überein: $\mathrm{sinc}\, z = 1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \cdots$

$$h(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

gekennzeichnet[23]. Der Grund liegt in der Darstellungsmöglichkeit von $1/f(z)$ durch $(z-z_0)^n\psi(z)$ und demzufolge $f(z) = (z-z_0)^{-n}\phi(z)$ mit $\phi(z) = 1/\psi(z)$. Die Funktion $\phi(z)$ ist bei z_0 selbst analytisch, denn alle Pole sind entsprechend ihrer Vielfachheit aus $f(z)$ "herausgezogen" und im Faktor $(z-z_0)^{-n}$ enthalten. Deshalb kann $\phi(z)$ um z_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden[24].

$$\phi(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \cdots$$

Die Laurent-Reihe für $f(z)$ erhält dadurch die Form:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^{-n}\phi(z) \\ &= \frac{c_0}{(z-z_0)^n} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z-z_0} + c_n + c_{n+1}(z-z_0) + c_{n+2}(z-z_0)^2 + \cdots \\ &= \underbrace{\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{h(z)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots , \end{aligned} \tag{D.27}$$

d. h. der Hauptteil $h(z)$ umfaßt nur eine endliche Zahl von Koeffizienten a_k. Diese Eigenschaft ermöglicht die Berechnung des Residuums auf der Grundlage der folgenden Formel:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z)\right] . \tag{D.28}$$

Die dahinter steckende Idee besteht darin, $f(z)$ nach Gleichung D.27 durch Multiplikation mit $(z-z_0)^n$ zu einer Polynomfunktion zu machen und dann den Koeffizienten a_{-1} durch $n-1$ -malige Ableitung zu extrahieren. Die Richtigkeit kann man einfach durch Einsetzen von $f(z)$ nachweisen.

[23] Damit ist gemeint, daß $a_{-n} \neq 0$ ist, alle weiteren a_k mit $k > n$ jedoch verschwinden.
[24] Man denke an Formel D.23 und die mit ihr verbundenen Ideen auf Seite 217.

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big[a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \cdots \\ + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \cdots \Big]$$

Differentiation der einzelnen Summanden, gefolgt von der Grenzwertbildung bestätigt Beziehung D.28.

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \Bigg[(n-1)!\, a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1(z-z_0)^2 \\ + \frac{(n+2)!}{3!} a_2(z-z_0)^3 + \frac{(n+3)!}{4!} a_3(z-z_0)^4 + \cdots \Bigg] = a_{-1}$$

Beispiele von Funktionen mit Pol sind $f(z) = \operatorname{cosec} z$ bei $z_0 = k\pi$ (Ordnung $n = 1$) sowie $f(z) = (z-1)^{-2}$ für $z_0 = 1$ (Ordnung $n = 2$)[25].

Speziell für einfache Pole ($n = 1$) gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)\, f(z) \right], \tag{D.29}$$

was bei gebrochen rationalen Funktionen zu

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{u(z)}{v(z)} = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0) \frac{u(z)}{v(z)} \right] = u(z_0) \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{v(z)} = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)} \tag{D.30}$$

führt[26] [Nee97, 9-III].

[25] Wie man schon an der Form erkennen kann, entspricht in diesem Fall die Funktion ihrer Laurent-Reihe.

[26] Die Herleitung ist einfach, wenn man $n = 1$, $\lim_{z\to z_0} v(z) = v(z_0) = 0$ sowie die Regel von Bernoulli-l'Hospital berücksichtigt.

D.4.3. Wesentliche Singularitäten

Wesentliche Singularitäten sind solche, die weder hebbar noch ein Pol sind [Nee97, 6-VIII], [FB00, III-4.3]. Der Hauptteil $h(z)$ solcher Funktionen hat die Form

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k},$$

d. h. alle Koeffizienten a_{-k} existieren (und zwar unendlich viele). Das Residuum an der Stelle z_0 ist für diesen Typ von Funktion üblicherweise mittels Integrationsformel D.21 zu bestimmen (wie z. B. für $\mathrm{e}^{(1-z)^{-1}}$ an der Stelle $z_0 = 1$).

Besitzt eine Funktion $f(z)$ keine wesentlichen Singularitäten[27], dann muß das Produkt $(z - z_0)^n f(z)$ die Hebbarkeitsbedingung

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0$$

für irgendeine Zahl $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Bei hebbaren Singularitäten stellt man fest, daß es sich mit $n = 1$ genau um Formel D.26 handelt, bei Polen läßt sich diese Bedingung aus Darstellung für $f(z)$ entsprechend Gleichung D.27 ableiten.

D.5. Satz von Liouville

Liouville's Satz soll hier, etwas anders als z. B. in [WW27, § 5·63], in drei Schritten hergeleitet werden.

1. Soll uns die Frage beschäftigen, ob man eine Supremum (kleinste obere Schranke) für den Betrag des Kurvenintegrales $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ angeben kann. Dazu gehen wir davon aus, daß $f(z)$ auf dem Integrationsweg C analytisch und mit $\sup_{z \in C} |f(z)| = M < \infty$ beschränkt ist. Liegen also auf C keine Singularitäten, dann gilt folgende Ungleichung [BC03, 37]:

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \int_a^b |f(z)|\,|\mathrm{d}z| \leq \int_a^b M\,|\mathrm{d}z| = M \int_a^b |\mathrm{d}z| \,.$$

[27] Funktionen, die im Endlichen nur hebbare Singularitäten oder Pole besitzen (also keinen wesentlich singulären Punkt), werden meromorph genannt [Hur00, I-6].

Geht man der besseren Vorstellung halber von einem Integrationsweg in Parameterdarstellung aus, d. h. $z_1 = \varphi(a)$ und $z_2 = \varphi(b)$, dann ist

$$M \int_a^b |\mathrm{d}z| = M \int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t = M \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t,$$

wobei letzter Ausdruck genau die Bogenlänge L der Kurve C darstellt. Ist $f(z)$ wie vorausgesetzt auf dem gesamten Integrationsweg analytisch und beschränkt, dann gilt für den Betragswert des Integrals [WW27, § 4·62], [BC03, 41]:

$$\left| \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq L \cdot M = L \sup_{z \in C} |f(z)| \,. \tag{D.31}$$

2. Sei Cauchy's Ungleichung für den Betrag der n–ten Ableitung von $f(z)$ an der Stelle z_0 von Interesse [WW27, § 5·23]. Wir gehen dabei von Beziehung D.17, also einem kreisförmigen Integrationsweg mit Radius r um z_0, aus um deren Wert (bzw. obere Grenze) zu bestimmen.

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| = \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}\, \mathrm{d}\theta \right|$$

Anwendung von Ungleichung D.31 führt mit der Länge $L = 2\pi$ und der Abkürzung $M = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$ zu

$$\left| \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}\, \mathrm{d}\theta \right| \leq 2\pi \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| f\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta} \right| = 2\pi M$$

und damit direkt weiter zur Relation

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M\,n!}{r^n} \,. \tag{D.32}$$

3. Bleibt nur noch der Satz von Liouville selbst, welcher nach [WW27, § 5·63] folgendermaßen lautet:

   > Sei $f(z)$ analytisch und beschränkt mit $|f(z)| \leq M < \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (sogar für $z \to \infty$, also eine *ganze* Funktion), dann ist $f(z)$ eine Konstante.

   Der Beweis steckt in Ungleichung D.32, denn dort heißt es für $n = 1$

$$\left|\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right| \leq \frac{M}{r}\,.$$

Läßt man nun $r \to \infty$ gehen um die gesamte komplexe Ebene einzuschließen, so gilt (unter der wesentlichen Voraussetzung, daß $f(z)$ überall beschränkt sei):

$$\left|\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right| = 0,$$

d. h. $f(z)$ ist konstant.

Interessant ist im Umkehrschluß, daß jede nicht-konstante analytische Funktion Singularitäten besitzen muß. Ansonsten wäre sie entweder nicht beschränkt oder nicht analytisch, würde also die Voraussetzungen nicht erfüllen.

Noch zwei Bemerkungen zum Satz von Liouville, die seine Bedeutung unterstreichen sollen:

1. In Ungleichung D.32 steckt für $n = 0$ das sogenannte Maximumprinzip nach [Cau54, II-6]:

$$|f(z_0)| \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

d. h. der Betrag des Funktionswertes im Punkt z_0 ist immer kleiner oder gleich dem größten Betragswert von $f(z)$ auf dem Kreis mit (irgendeinem) Radius r um z_0.

2. Der Beweis des Hauptsatzes der Algebra, daß jedes Polynom $p(z)$ mit komplexen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben muß, ist mit seiner Hilfe sehr elegant möglich. Denn hätte die Funktion $1/p(z)$ nirgendwo einen Pol (auf $\mathbb{C}$ uneingeschränkt analytisch), dann wäre sie überall beschränkt. Nach Liouville müßte es sich bei $1/p(z)$ also um eine Konstante handeln, was der Voraussetzung widerspricht, daß $p(z)$ ein nicht-konstantes Polynom ist [FB00, II-3].

D.6. Lemma von Jordan

Der Hilfssatz von C. Jordan hat besondere Bedeutung bei komplexen Integralen, die teilweise im Unendlichen verlaufen. Er lautet:

Ist die Funktion $f(z)$ analytisch auf dem Integrationsweg C_∞ nach Abbildung D.3 (obere Halbebene) mit $r \to \infty$ und hat für $\alpha > 0$ die Eigenschaft $\lim_{r\to\infty} f(z) = 0$ oder für $\alpha = 0$ gleichwertig $\lim_{r\to\infty} z\, f(z) = 0$, dann gilt:

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{D.33}$$

Für den Beweis gehen wir wie in [WW27, § 6·222] von

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \tag{D.34}$$

aus und bestimmen eine obere Schranke für den Grenzwert. Wie im ersten Punkt der Herleitung von Liouville's Theorem gilt auch hier, daß der Betrag des Integrals kleiner als das Integral über den Betrag (des Integranden) ist.

$$\left|\int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{C_\infty} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z}\right| \cdot \left|f(z)\right| \cdot \left|\mathrm{d}z\right|$$

Mit der Parameterdarstellung $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = r\cos\theta + \mathrm{j}r\sin\theta$ des Integrationsweges C_∞, dem zugehörigen Differential $\mathrm{d}z = \mathrm{j}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ sowie der Beziehung $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha r\cos\theta}\,\mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}$ ergibt sich schließlich

$$\left|\int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le r\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\left|f\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta \le r\sup_{z\in C_\infty}|f(z)|\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{D.35}$$

Der Integrand des rechtsseitigen Integrals ist bezüglich des Ordinatenwertes $\theta = \pi/2$ symmetrisch und kann deshalb zu $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$ vereinfacht werden. Weiter kann man für das Intervall $0 \le \theta \le \pi/2$ die Ungleichung $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$ heranziehen[28] und die Relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\alpha r\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{D.36}$$

ableiten, welche nun bei der Berechnung des (vereinfachten) Integrals verwendet wird.

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\alpha r\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{\alpha r}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}\alpha r\theta}\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\alpha r}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha r}\right) \tag{D.37}$$

Einsetzen in Ungleichung D.35 ergibt die Grenzwerte

[28] Mit einem Bild des Funktionsverlaufes (wie z. B. in [BC03, 74] oder [Mar95, 10.2] angegeben) ist die Ungleichung sofort einzusehen.

$$\lim_{r\to\infty} r \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha r \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \le \frac{\pi}{\alpha} \qquad (\alpha \ge 0) \tag{D.38}$$

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \frac{\pi}{\alpha} \lim_{r\to\infty} \sup_{z\in C_\infty} |f(z)|, \tag{D.39}$$

was mehrere Fallunterscheidungen notwendig macht. Gemeinsam ist allen, daß es um Forderungen an die Funktion $f(z)$ mit $z \in C_\infty$ geht (d. h. $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$), welche ein Verschwinden des letzten Ausdrucks bewirken und dadurch Jordan's Lemma bestätigen.

1. Im einfachsten Fall, d. h. für $\alpha > 0$ ist sofort ersichtlich, daß $\lim_{r\to\infty} f(z) = 0$ gelten muß. Außerdem ist erwähnenswert, daß Ungleichung D.39 die bekannte Abschätzung $\lim_{r\to\infty} |\int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}z}\,\mathrm{d}z| \le \pi$ beinhaltet, welche sich für $\alpha = 1$ und $f(z) = 1$ ergibt.

2. Werte $\alpha < 0$ führen zu folgenden Veränderungen an den bisherigen Formeln:

   a) In Ungleichung D.36 dreht sich das Relationszeichen.

   b) Bildet man den Grenzwert $\lim_{r\to\infty}$ für Beziehung D.37, dann ist das Ergebnis $-\infty$.

   c) Wegen der beiden vorangegangenen Punkte haben die Ungleichungen D.38 und D.39 keinen Bestand.

   Aus diesem Dilemma kann man sich jedoch durch Drehung des Integrationsweges in die negativ-imaginäre Halbebene (angedeutet in Abbildung D.3) befreien. Mit den Grenzen $[\pi, 2\pi]$ und der Substitution $\theta = \phi + \pi$ ist man in der Lage, den Ausgangspunkt nach Ungleichung D.35 wiederherzustellen und die Beweisschritte vom Fall $\alpha > 0$ zu übernehmen[29].

$$\int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\alpha r \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{|\alpha| r \sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-|\alpha| r \sin\phi}\,\mathrm{d}\phi$$

3. Sollte der Exponentialfaktor α jedoch Null sein, dann verschwindet der Nenner auf der rechten Seite von Ungleichung D.39 und man muß (schärfer noch) $\lim_{r\to\infty} z\,f(z) = 0$ fordern. Jordan's Lemma D.33 nimmt unter genannten Voraussetzungen die spezielle Form

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{D.40}$$

   an.

[29] Das Lemma von Jordan (D.33) bleibt jedoch immer in seiner ursprünglichen Form erhalten, d. h. α ist in seiner realen Ausprägung einzusetzen.

4. Läßt man (abweichend von der Voraussetzung) ein negativ-imaginäres α zu, dann geht mit $\alpha = -\mathrm{j}\beta$ der Betrag des Integrals nach Formel D.34 in

$$\left|\int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\beta z} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq r\int_0^\pi \mathrm{e}^{\beta r\cos\theta}\left|f\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta \leq r\sup_{z\in C_\infty}|f(z)|\int_0^\pi \mathrm{e}^{\beta r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

über. Wegen des Cosinus-Terms im Exponenten wird Jordan's Lemma hier nicht zutreffen, was aber (wieder) durch Veränderung des Integrationsweges behoben werden kann. Dazu wählt man als Integrationsgrenzen $[\pi/2, 3\pi/2]$ und substituiert $\varphi = \theta - \pi/2$ bzw. $\cos\theta = -\sin\varphi$. Durch den neuen Integrationsweg C'_∞ im Unendlichen (vgl. auch Abbildung D.5) wird die ursprüngliche Form von Ungleichung D.35 wieder hergestellt, womit der Beweis auf dem gewohnten Weg fortgesetzt werden kann[30].

$$\begin{aligned} r\sup_{z\in C_\infty}|f(z)|\int_0^\pi \mathrm{e}^{\beta r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \quad &\Rightarrow \quad r\sup_{z\in C'_\infty}|f(z)|\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\beta r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \quad r\sup_{z\in C'_\infty}|f(z)|\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\beta r\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

D.7. Uneigentliche Integrale

D.7.1. Anwendung von Jordan's Lemma im Fall $\alpha = 0$

D.7.1.1. Stetige Funktionen

Das Lemma von Jordan in seiner allgemeinen Form nach Gleichung D.33 ermöglicht (unter den angezeigten Voraussetzungen) die Berechnung von uneigentlichen Integralen durch komplexe Integration. Um das Prinzip zu verdeutlichen befassen wir uns zuerst mit dem (einfachen) Spezialfall nach Gleichung D.40, welcher die Berechnung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

unter Umständen wesentlich vereinfacht.

[30] Sollte jedoch $\alpha = \mathrm{j}\beta$ gelten, dann kann dies (wie im reellen Fall) durch Drehung von C'_∞ in die rechte Halbebene kompensiert werden.

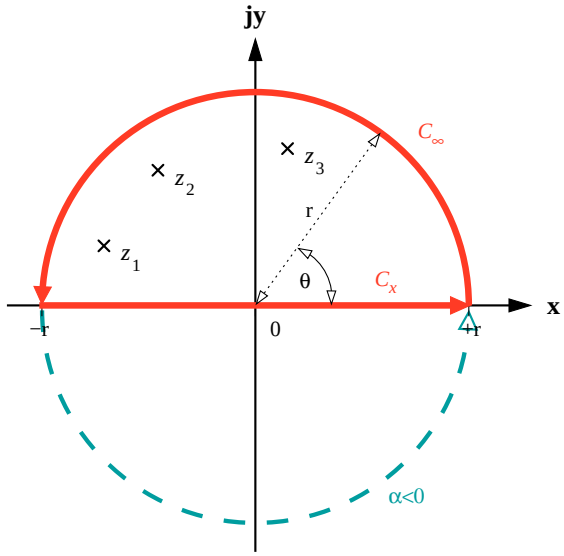


Abbildung D.3.: Integrationsweg(e) für reelles α

Dazu soll auf dem geschlossenen Weg $C = C_\infty \to C_x$ nach Abbildung D.3 unter Zuhilfenahme des Residuensatzes integriert werden. Nun lassen wir $r \to \infty$ laufen, was die Residuen aller Singularitäten z_n in der oberen komplexen Halbebene ($\mathrm{Im}(z_n) > 0$) adressiert.

$$\lim_{r\to\infty} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}\,z_n>0} \mathrm{res}_{z_n} f(z) = \underbrace{\lim_{r\to\infty} \int_{C_\infty} f(z)\,\mathrm{d}z}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{D.41}$$

Mit Jordan's Lemma erhält man als Berechnungsvorschrift:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \mathrm{res}_{z_n} f(z)\,. \tag{D.42}$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ kann also einzig und allein basierend auf der Kenntnis der Residuen (an den Singulärstellen z_n, die oberhalb der reellen Achse liegen) berechnet werden.

Voraussetzungen für die Anwendbarkeit Notwendige Bedingungen für die Anwendbarkeit von Formel D.42 sind:

- $f(x)$ ist auf dem Integrationsweg entlang der reellen Achse analytisch (und beschränkt);

- nach JORDAN's Lemma gilt in der oberen Halbebene: $\lim_{|z|\to\infty} z\, f(z) = 0$;
- das uneigentliche Integral konvergiert [WW27, § 6·22].

Kann man sogar absolute Konvergenz, d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ nachweisen, dann ist wegen

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \tag{D.43}$$

der letzte Punkt der notwendigen Bedingungen (gewöhnliche Konvergenz) grundsätzlich erfüllt [WW27, § 4·43].

Die Eigenschaft der absoluten Konvergenz kann für ganz bestimmte Klassen von Funktionen generell nachgewiesen werden, wovon eine z. B. die mit der "Abkling"-Charakteristik

$$\left|z^{\sigma} f(z)\right| \leq M < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad |f(x)| \leq M\,|x|^{-\sigma}, \qquad \sigma > 1$$

ist [GKH+79, 20.2]. Wir betrachten also die Beschränktheit von $|x^{\sigma} f(x)|$ unter der Maßgabe, daß sich eine Zahl $\sigma(x) > 1$ (wie gefordert) für jeden Wert $x > \alpha$ finden läßt. Ist dem so, dann gilt im offenen Intervall $\alpha > 0$ die Relation

$$\int_{\alpha}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lim_{r\to\infty} \int_{\alpha}^{r} M x^{-\sigma}\,\mathrm{d}x$$

und mit

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\alpha}^{r} M x^{-\sigma}\,\mathrm{d}x = M \lim_{r\to\infty} \frac{1}{1-\sigma} x^{1-\sigma}\Big|_{\alpha}^{r} = \frac{M}{1-\sigma} \lim_{r\to\infty} \left(r^{1-\sigma} - \alpha^{1-\sigma}\right) = \frac{M}{\sigma-1}\alpha^{1-\sigma}$$

kann die absolute Konvergenz entlang des positiven Teils der reellen Achse ($x > 0$) nachgewiesen werden[31].

$$\int_{+0}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{M}{\sigma-1} \lim_{\alpha\to+0} \alpha^{1-\sigma} < \infty$$

Gleichzeitig wird die Bedingung von JORDAN's Lemma erfüllt, denn:

$$\lim_{z\to\infty} |z\, f(z)| = \lim_{z\to\infty} \left|z^{1-\sigma} f(z)\, z^{\sigma}\right| \leq M \lim_{z\to\infty} |z|^{1-\sigma} = 0\,.$$

[31] Der Nachweis läßt sich für das Integral $\int_{-\infty}^{-0} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ gleichermaßen führen.

In ähnlicher Art und Weise ist bei exponentiell abfallenden Funktionen die absolute Konvergenz dadurch gegeben, daß sie (wenn eine Zahl $\sigma(x) > 1$ existiert) für $|x| \to \infty$ die Ungleichung $|\mathrm{e}^{\sigma|x|} f(x)| \leq M < \infty$ erfüllen[32]. Denn setzt man diese Relation in Ungleichung D.43 ein

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} M\,\mathrm{e}^{-\sigma|x|}\,\mathrm{d}x$$

und löst das rechtsseitige Integral auf,

$$\int_{-\infty}^{\infty} M\,\mathrm{e}^{-\sigma|x|}\,\mathrm{d}x = 2M\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x}\,\mathrm{d}x = -\frac{M}{\sigma}\lim_{T\to\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x}\Big|_0^T = \frac{M}{\sigma}\left(1 - \lim_{T\to\infty} \mathrm{e}^{-\sigma T}\right) = \frac{M}{\sigma}$$

so wird die Beschränktheit des Ergebnisses erkennbar.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{\sigma} < \infty$$

D.7.1.2. Gebrochen rationale Funktionen

Speziell für gebrochen rationale Funktionen ist es durch Hinzunahme von Beziehung D.30 möglich, noch folgende Vereinfachung anzugeben (vorausgesetzt alle Pole sind von erster Ordnung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \frac{p(z_n)}{q'(z_n)}\,.$$

Die Bedingung $\lim_{r\to\infty} z\,f(z) = 0$ kann man bei (echt) gebrochen rationalen Funktionen dahingehend konkretisieren, daß der Grad des Nennerpolynoms $q(x)$ um mindestens zwei größer als der des Zählerpolynoms $p(x)$ sein muß.

D.7.1.3. Halb-analytische Funktionen

Oben halbanalytische Funktionen Für eine in der oberen komplexen Halbebene[33] analytische Funktion $f(z)$ kann man unter bestimmten Voraussetzungen jeden Funktionswert im

[32] Der Abfall der Funktionswerte erfolgt hier wegen $\mathrm{e}^{\sigma x} > x^{\sigma} = \mathrm{e}^{\sigma \ln x}$ noch schneller als bei Funktionen, die durch $|x^{\sigma} f(x)| \leq M$ beschränkt sind (wenn $x \to \infty$ strebt).

[33] Als *halbanalytisch* sollen Funktionen bezeichnet sein, die in *einer* Halbebene von $\mathbb{C}$ uneingeschränkt analytisch sind.

Gebiet $\mathrm{Im}(z) > 0$ durch Integration entlang der reellen Achse berechnen. Dazu soll (wie bei der Herleitung von Cauchy's Integralformel D.14) eine neue Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \tag{D.44}$$

definiert sein, für die wir zunächst das Residuum an der (einzigen) Singularität z_0 bestimmen (vgl. Formel D.29).

$$\mathrm{res}_{z_0}\, g(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)\, g(z)\right] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \frac{f(z)}{z - z_0}\right] = f(z_0)$$

Einsetzen in den Ausgangspunkt des allgemeinen Falls ($\alpha = 0$) nach Gleichung D.41 führt mit dem Integrationsweg laut Abbildung D.3 zu:

$$\lim_{r \to \infty} \oint_C g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{j}\, f(z_0) = \underbrace{\lim_{r \to \infty} \int_{C_\infty} g(z)\,\mathrm{d}z}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0}\,\mathrm{d}x\,.$$

Im Ergebnis erhält man Cauchy's Integralformel[34] in der Halbebene $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ nach [BC03, 119].

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Im}(z_0) > 0 \tag{D.45}$$

Rechts halbanalytische Funktionen Sollte $f(z)$ entgegen der bisherigen Ausführungen im Gebiet $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ analytisch sein, dann integriert man auf einem Halbkreis in der rechten Halbebene entsprechend Abbildung D.5. Die einzige Singularität z_0 liegt (wieder) innerhalb der Kurve $C = C_y \to C_\infty$ und hat, nimmt man Cauchy's Integralformel D.13 sowie Gleichung D.21 zu Hilfe[35], das Residuum

$$\mathrm{res}_{z_0}\, g(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0)\,.$$

[34] Benennt man z_0 in z und außerdem die Integrationsvariable um, so kommt man zu der üblichen Darstellung $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$. Um jedoch Mehrdeutigkeiten zu vermeiden wird (außer in Tabelle D.1) die Schreibweise mit z_0 beibehalten.

[35] Denn Beziehung D.45 ist augenscheinlich ein Spezialfall von Cauchy's Integralformel D.14 für den im Unendlichen verlaufenden Integrationsweg $C = C_x \to C_\infty$ nach Abbildung D.3.

Nach dem Residuensatz (und bei Anwendung von JORDAN's Lemma für den Fall eines positiv imaginären α, vgl. Abschnitt D.6) ergibt sich daraus

$$\int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \int_{C_y} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = -\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,\mathrm{res}_{z_0}\frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi\mathrm{j}\,f(z_0)$$

und somit für den Funktionswert an der Stelle z_0:

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z, \qquad \mathrm{Re}(z_0) > 0\,. \tag{D.46}$$

Nimmt man noch die Ersetzung $z = \mathrm{j}y$ vor, so läßt sich die Integration entlang der imaginären Achse auf eine reelle Integrationsvariable abbilden (siehe auch Tabelle D.1).

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathrm{j}y)}{\mathrm{j}y-z_0}\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{Re}(z_0) > 0 \tag{D.47}$$

Abhängigkeit zwischen Real- und Imaginärteil Gehen wir jetzt nocheinmal zum Fall $\mathrm{Im}(z_0) > 0$, d. h. in die obere Halbebene[36] zurück und betrachten Formel D.45 mit Blick auf die Lage von z_0. Nehmen wir (im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen) an, der Punkt z_0 läge in der unteren Halbebene und bezeichnen ihn der besseren Unterscheidbarkeit wegen mit $z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1$. Aufgrund des Fehlens von Singularitäten innerhalb der Kurve C (siehe Abbildung D.3, f ist in der oberen Halbebene als analytisch vorausgesetzt), muß nach dem Satz von CAUCHY das Integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_1}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-z_1}\,\mathrm{d}x = 0$$

verschwinden. Bringt man diese Gleichung in Zusammenhang mit dem Punkt z_0 nach Formel D.45 auf einen gemeinsamen Nenner,

[36] Weitere Varianten bezüglich der Halbebenen, in denen $f(z)$ analytisch ist, sind in Tabelle D.1 zusammengefaßt.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad 0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_1}\,\mathrm{d}x$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - z_1)\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad 0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - z_0)\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x$$

so läßt sich aus der rechtsseitigen Beziehung [37] die Äquivalenz

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x \tag{D.48}$$

ermitteln. Deshalb kann man für den Funktionswert an der Stelle z_0 schreiben:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z_1)\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Wählt man den Punkt z_1 jetzt noch (gezielt) als Spiegelung von z_0 an der reellen Achse ($z_1 = x_0 - \mathrm{j}y_0 = z_0^*$), so ergibt einfaches Einsetzen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z_0^*)\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_0^*)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z_0^*)\, f(x)}{(x - z_0)(x - z_0)^*}\,\mathrm{d}x,$$

was zu folgenden Berechnungsformeln für $f(z_0)$ führt [BC03, 119]:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0\, f(x)}{|x - z_0|^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - x_0)\, f(x)}{|x - z_0|^2}\,\mathrm{d}x, \qquad y_0 > 0\,. \tag{D.49}$$

Durch Einsetzen von $f(x + \mathrm{j}y) = u(x,y) + \mathrm{j}v(x,y)$ lassen sich außerdem die Darstellungsformen

[37] Welche die Austauschbarkeit von $z_0 = x_0 + \mathrm{j}y_0$ durch x sowie y_0 durch $\mathrm{j}(x_0 - x)$ im Zähler des Integranden anzeigt.

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0\, u(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0\, v(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x \tag{D.50}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)\, v(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)\, u(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x \tag{D.51}$$

gewinnen, wobei die Realteil-Beziehung auch Poisson's Integralformel für die Halbebene genannt wird[38]. Durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil erhält man daraus die Formeln

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0\, u(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)\, v(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x \tag{D.52}$$

$$v(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0\, v(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)\, u(x,0)}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x, \tag{D.53}$$

welche durch Einsetzen in D.50 und D.51 die Berechnung des Funktionswertes $f(z_0) = u(x_0,y_0) + \mathrm{j}v(x_0,y_0)$ aus den Randwerten nur einer Komponente ermöglichen.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 - \mathrm{j}(x-x_0)}{|x-z_0|^2} u(x,0)\,\mathrm{d}x & f(z_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)+\mathrm{j}y_0}{|x-z_0|^2} v(x,0)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-z_0)^*}{|x-z_0|^2} u(x,0)\,\mathrm{d}x & &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-z_0)^*}{|x-z_0|^2} v(x,0)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,0)}{x-z_0}\,\mathrm{d}x & &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x,0)}{x-z_0}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{D.54}$$

Letztere Beziehungen eröffnen in Verbindung mit Gleichung D.5 außerdem die Möglichkeit der Differentiation von $f(z)$ an jeder Stelle z_0 mit $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ ausgehend von den Randwerten nur einer Komponente[39].

[38] Die klassische Darstellung des Poisson-Integrals wird in der Literatur oft in Polarkoordinaten gegeben, wodurch der Integrationsweg entlang der reellen Achse zu einem Kreis um den Koordinatenursprung wird [BC03, 116], [AG54, n° 59], [Cau32]. Dazu setzt man typischerweise $x = -\tan(\theta/2) = -\mathrm{j}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}} = -\mathrm{j}\frac{1-w}{1+w}$ und geht durch Bilinear-Transformation $z_0 = -\mathrm{j}\frac{1-w_0}{1+w_0}$ zu einem Polarkoordinatensystem über.

[39] Bei Gleichung D.55 handelt es sich offensichtlich um einen Spezialfall von Ableitungsformel D.15 für halbanalytische Funktionen (auf einem Integrationsweg entlang der reellen Achse).

Tabelle D.1.: Berechnungsformeln für halbanalytische Funktionen

Bedingung	$f(z) =$		
$\lim\limits_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} f(z) = 0$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}\frac{f(\mathrm{j}\xi)}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,f(\xi)}{\lvert\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)\,f(\xi)}{\lvert\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$	$\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}[f(\xi)]}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[f(\xi)]}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$
$\lim\limits_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)<0}} f(z) = 0$	$-\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}\frac{f(\mathrm{j}\xi)}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$	$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,f(\xi)}{\lvert\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$ $-\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)\,f(\xi)}{\lvert\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$	$-\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}[f(\xi)]}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[f(\xi)]}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$
$\lim\limits_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Re}(z)>0}} f(z) = 0$	$-\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\mathrm{j}\xi)}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,f(\mathrm{j}\xi)}{\lvert\mathrm{j}\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$ $-\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-y)\,f(\mathrm{j}\xi)}{\lvert\mathrm{j}\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$	$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}[f(\mathrm{j}\xi)]}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[f(\mathrm{j}\xi)]}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$
$\lim\limits_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Re}(z)<0}} f(z) = 0$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\mathrm{j}\xi)}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$	$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,f(\mathrm{j}\xi)}{\lvert\mathrm{j}\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$ $\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-y)\,f(\mathrm{j}\xi)}{\lvert\mathrm{j}\xi-z\rvert^2}\,\mathrm{d}\xi$	$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}[f(\mathrm{j}\xi)]}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$ $-\frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}[f(\mathrm{j}\xi)]}{\mathrm{j}\xi-z}\,\mathrm{d}\xi$

$$\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}x_0} = \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{u(x,0)}{x-z_0}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x,0)}{(x-z_0)^2}\,\mathrm{d}x \tag{D.55}$$

Grenzfälle

1. Sollte Jordan's Lemma wegen $\lim_{r\to\infty} f(z) \neq 0$ einmal nicht anwendbar sein, dann muß das Integral $\int_{C_\infty} f(z)/(z-z_0)\,\mathrm{d}z$ für $r\to\infty$ berücksichtigt werden. Nehmen wir beispielhaft den Fall der rechtsseitig halbanalytischen Funktionen, dann hilft die Substitution $z-z_0 = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ mit $\mathrm{d}z = \mathrm{j}r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ weiter.

$$2\pi\mathrm{j}\,f(z_0) = \int_{C_\infty}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

Für den Spezialfall $f(z) = 1$ kann man durch formales Einsetzen

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \overbrace{\mathrm{j} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta}^{\int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 1$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi}\, \theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

das uneigentliche Integral

$$\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = -\mathrm{j}\pi, \qquad x_0 > 0 \tag{D.56}$$

ermitteln und dadurch auch $\int_{C_\infty} (z-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}z = \mathrm{j}\pi$ für $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ verifizieren.

2. Alle Ausführungen zu analytischen Funktionen in der rechten Halbebene haben sich bisher auf Funktionswerte mit $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ beschränkt. Interessant z. B. für den Zusammenhang zwischen der Fourier- und Laplace-Transformation sind aber auch die Funktionswerte auf der imaginären Achse $\mathrm{Re}(z_0) \to 0$. Dazu soll die Funktion $f(z)/(z-z_0)$ auf dem Integrationsweg entsprechend Abbildung D.4 betrachtet werden.

   Wegen der Holomorphieeigenschaft in der rechten Halbebene muß nach dem Satz von Cauchy folgendes gelten:

$$\int_{C_\infty} - \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}(y_0-\varepsilon)} + \int_{\mathrm{j}(y_0+\varepsilon)}^{\mathrm{j}\infty} + \int_{C_\varepsilon} \right] = 0\,.$$

   Das Integral auf dem Weg C_∞ verschwindet nach Jordan's Lemma für $r \to \infty$, wenn $\lim_{r\to\infty} f(z) = 0$ angenommen werden kann. Die beiden Teilintegrale auf dem geraden Integrationsweg entlang der imaginären Achse stellen für $\varepsilon \to 0$ genau einen Cauchy'schen Hauptwert dar, was ihre Zusammenfassung ermöglicht.

$$\mathrm{V.\,P.} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \tag{D.57}$$

   Mit der Substitution $z - z_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, welche die gewünschte Integrationskurve verkörpert, nimmt das Integral auf dem Weg C_ε die Darstellung

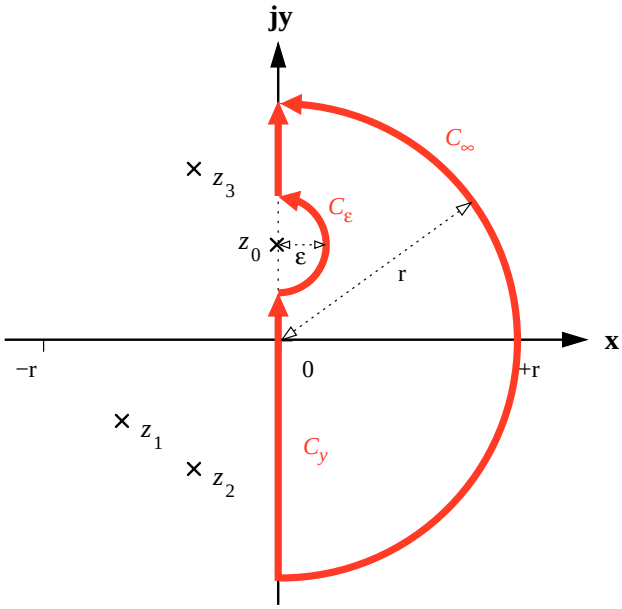


Abbildung D.4.: Integrationsweg mit Singularität auf imaginärer Achse

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \mathrm{j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(z_0+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

an. Bildet man den Grenzwert $\varepsilon \to 0$, so geht es (Stetigkeit von f bei z_0 vorausgesetzt) in

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,f(z_0)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \mathrm{j}\pi\,f(z_0) \tag{D.58}$$

über, was sich auch als Spezialfall von Cauchy's Integralformel D.13 deuten läßt[40]. Einsetzen in unser Zwischenergebnis D.57 ergibt[41]

$$\text{V. P.}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{j}\pi\,f(z_0)$$

und deshalb

[40] Formel D.58 impliziert für den Fall eines einfachen Pols z_0 auf der imaginären Achse: $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{j}\pi\,\mathrm{res}_{z_0} f(z)$ und entspricht damit dem Ergebnis in [BC03, 75] für eingerückte Pfade (unter gleichen Bedingungen auf der reellen Achse).

[41] Sollte Jordan's Lemma nicht anwendbar sein, so gilt: $\mathrm{j}\pi\,f(z_0) = \int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \text{V. P.}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$.

$$f(\mathrm{j}y_0) = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \frac{f(z)}{z-\mathrm{j}y_0}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathrm{j}y)}{y-y_0}\,\mathrm{d}y \tag{D.59}$$

für Punkte auf der imaginären Achse. Im Vergleich mit den für $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ gültigen Beziehungen (insbesondere dem Äquivalent zu D.49 in Tabelle D.1) läßt sich feststellen, daß der Grenzübergang

$$\lim_{x_0\to 0} f(z_0) = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\lim_{x_0\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-y_0)f(\mathrm{j}y)}{|\mathrm{j}y-z_0|^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathrm{j}y)}{y-y_0}\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{Re}(z_0) \geq 0$$

genau mit dem Ergebnis für $\mathrm{Re}(z_0) = 0$ übereinstimmt.

3. Auf der Grundlage von Formel D.59 kann man zeigen, daß Real- und Imaginärteil einer rechts halbanalytischen Funktion (entlang der imaginären Achse) über die Hilbert-Transformation[42] verknüpft sind [Bra03, 13]. Die Behauptung ist unmittelbar zu verifizieren, wenn man $f(\mathrm{j}y_0)$ in Real- und Imaginärteil separiert

$$u(0,y_0) + \mathrm{j}v(0,y_0) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(0,y)}{y-y_0}\,\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{j}}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0,y)}{y-y_0}\,\mathrm{d}y$$

und beide Seiten der Gleichung betrachtet.

$$\begin{aligned} u(0,y_0) &= -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(0,y)}{y-y_0}\,\mathrm{d}y = \mathcal{H}\{v(x_0,0)\} \\ v(0,y_0) &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0,y)}{y-y_0}\,\mathrm{d}y \quad = -\mathcal{H}\{u(x_0,0)\} \end{aligned}$$

Voraussetzungen für die Anwendbarkeit Eine wesentliche Voraussetzung für das Verschwinden des Integrals auf dem Integrationsweg C_∞ nach Abbildung D.3 war nach dem Lemma von Jordan: $\lim_{r\to\infty} z\,g(z) = 0$. Für Funktionen, die in einer Halbebene uneingeschränkt analytisch sind, reduziert sich die Forderung allgemein auf

[42] Wie in [PP02, 9], [Mar95, 5.1] und [Fri85, 4] wird die Hilbert-Transformationen durch $\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi$ definiert.

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|z\frac{f(z)}{z-z_0}\right| = \lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{1-z_0/z}\right| = \lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = 0\,.$$

Zu beachten ist dabei, daß $|z| \to \infty$ je nach Verlauf des halbkreisförmigen Integrationsweges noch mit einer anderen Bedingung, den Real- oder Imaginärteil von z betreffend, zu kombinieren ist (vgl. Tabelle D.1).

Weitere Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Berechnungsformeln bestehen darin, daß $f(z)$ auf dem jeweiligen Integrationsweg analytisch (sowie beschränkt) und das zugeordnete Integral konvergent sein muß (siehe auch Abschnitt D.7.1.1).

D.7.2. Anwendung von Jordan's Lemma im Fall $\alpha \neq 0$

Um Jordan's Lemma in seiner allgemeinen Form anzuwenden, wollen wir den Prozeß jetzt etwas umdrehen und zuerst eine komplexe Funktion $w(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)$ definieren. Im nächsten Schritt soll versucht werden, das Integral $\oint_C w(z)\,\mathrm{d}z$ auf der geschlossenen Kurve $C = C_\infty \to C_x$ nach Abbildung D.3 für den Grenzfall $r \to \infty$ zu evaluieren.

$$\lim_{r\to\infty}\oint_C w(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0}\mathrm{res}_{z_n}\,w(z) = \underbrace{\lim_{r\to\infty}\int_{C_\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z}_{0} + \int_{z=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ausgehend von dem Ergebnis

$$2\pi\mathrm{j}\sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0}\mathrm{res}_{z_n}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{D.60}$$

wobei z_n wieder die Pole (isolierte Singularitäten) der Funktion $w(z)$ repräsentiert, kann man jetzt noch in Gleichungen für den Real- und Imaginärteil separieren.

$$-2\pi\sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0}\mathrm{Im}\left\{\mathrm{res}_{z_n}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\right]\right\} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$2\pi\sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0}\mathrm{Re}\left\{\mathrm{res}_{z_n}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\right]\right\} = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

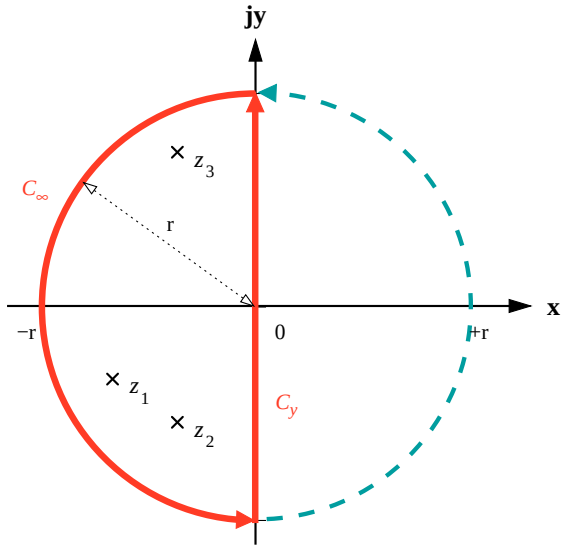


Abbildung D.5.: Integrationsweg(e) für imaginäres α

Was hier als Ergebnis präsentiert wurde, hat (insbesondere Formel D.60 betreffend) besondere Bedeutung für die inverse Laplace-Transformation [BC03, 81], [Sto92, 2.4.4], [Wun62, 2.22]. Unter anderem wird für die Voraussetzung $\alpha > 0$ von Jordan's Lemma deutlich, daß sich das Konvergenzverhalten des rechtsseitigen Integrals wegen der abgeschwächten Forderung $\lim_{r\to\infty} f(z) = 0$ deutlich verbessert.

Die bis hierher gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Integration entlang der x-Achse lassen sich auch auf den Weg entlang der y-Achse entsprechend Abbildung D.5 anwenden [Wun62, 2.32]. Da nach dem Lemma von Jordan auch in diesem Fall das Integral auf dem Weg C_∞ verschwindet (vgl. letzter Absatz in Abschnitt D.6, wenn α negativ-imaginär ist), wird das uneigentliche Integral mit Hilfe der Singularitäten in der linken Halbebene berechenbar.

$$\lim_{r\to\infty} \oint_C w(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Re}(z_n)<0} \mathrm{res}_{z_n}\, g(z) = \underbrace{\lim_{r\to\infty} \int_{C_\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z}_{0} + \int_{z=-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \mathrm{e}^{\beta z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{z=-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \mathrm{e}^{\beta z} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Re}(z_n)<0} \mathrm{res}_{z_n} \left[\mathrm{e}^{\beta z} f(z)\right], \qquad \beta > 0 \tag{D.61}$$

Für die Fälle von Jordan's Lemma mit negativem α (egal ob reell oder imaginär, vgl. Abschnitt D.6) ist der entsprechende Weg C_x bzw. C_y negativ anzusetzen, wenn die ganze Kurve C

betrachtet wird. Aus diesem Grund sind entweder die Integrationsgrenzen oder das Vorzeichen des reellen/imaginären Integrals umzukehren.

Tabelle D.2 gibt einen Überblick, was die Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von Jordan's Lemma betrifft. Interessant ist speziell für den Fall $\alpha = 0$, daß es danach eine Verbindung zwischen den Residuen der Pole in der oberen und unteren bzw. linken und rechten Halbebene gibt:

$$\sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} [\mathrm{res}_{z_n} f(z)] = -\sum_{\mathrm{Im}(z_n)<0} [\mathrm{res}_{z_n} f(z)] \ .$$

Tabelle D.2.: Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von Residuen

α	Berechnungsvorschrift	Voraussetzung
pos.-reell	$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \mathrm{res}_{z_n} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha z} f(z)\right]$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} f(z) = 0$
neg.-reell	$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\lvert\alpha\rvert z} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}(z_n)<0} \mathrm{res}_{z_n} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\lvert\alpha\rvert z} f(z)\right]$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)<0}} f(z) = 0$
pos.-imag.	$\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \mathrm{e}^{-\lvert\alpha\rvert z} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Re}(z_n)>0} \mathrm{res}_{z_n} \left[\mathrm{e}^{-\lvert\alpha\rvert z} f(z)\right]$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Re}(z)>0}} f(z) = 0$
neg.-imag.	$\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} \mathrm{e}^{\lvert\alpha\rvert z} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Re}(z_n)<0} \mathrm{res}_{z_n} \left[\mathrm{e}^{\lvert\alpha\rvert z} f(z)\right]$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Re}(z)<0}} f(z) = 0$
0	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}(z_n)>0} \mathrm{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)>0}} z\,f(z) = 0$
0	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Im}(z_n)<0} \mathrm{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Im}(z)<0}} z\,f(z) = 0$
0	$\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = -2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Re}(z_n)>0} \mathrm{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Re}(z)>0}} z\,f(z) = 0$
0	$\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = 2\pi\mathrm{j} \sum_{\mathrm{Re}(z_n)<0} \mathrm{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{\lvert z\rvert\to\infty \\ \mathrm{Re}(z)<0}} z\,f(z) = 0$

E. Tabellen

E.1. Fourier-Transformation

An dieser Stelle sollen einige wichtige Korrespondenzen der Fourier-Transformation gegeben sein, welche (als Handwerkszeug) unbedingt benötigt werden. Eine umfassende Abhandlung inklusive der zugehörigen Beweise sowie zahlreiche Abbildungen zum Spektrum von Signalen findet man z. B. in [Pap62, Bra03, Mar95, Fri85, Sto92].

E.1.1. Definition

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{E.1}$$

Beide Integrale sind dabei als Cauchy'sche Hauptwerte zu verstehen, d. h. unter anderem $f(t) = [f(t-0) + f(t+0)]/2$. Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals bestimmt dabei über die Existenz der jeweiligen Transformierten[1]. Für die Klasse von Zeitfunktionen $f(t)$ mit der Eigenschaft (absoluter Konvergenz des Integrals)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

existiert $F(\mathrm{j}\omega)$ jedoch grundsätzlich[2] [Sto92, 5.1].

Für reelle Zeitfunktionen, welche sich immer in einen geraden und einen ungeraden Teil $f(t) = f_g(t) + f_u(t)$ aufspalten lassen, gilt die Vereinfachung:

$$F(\mathrm{j}\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f_g(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t - 2\mathrm{j}\int_{0}^{\infty} f_u(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aus diesem Gund muß es sich bei $\mathrm{Re}\,F(\mathrm{j}\omega)$ auch um eine gerade, bei $\mathrm{Im}\,F(\mathrm{j}\omega)$ jedoch um eine ungerade Funktion handeln.

[1] Im ungünstigsten Fall unter Hinzunahme von Dirac-Stößen.
[2] Wegen $|F(\mathrm{j}\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

E.1.2. Regeln

Bezeichnung	Zeitfunktion	Bildfunktion	Bemerkungen
Linearität	$a\,f(t)+b\,g(t)$	$a\,F(\omega)+b\,G(\omega)$	
Ähnlichkeit	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$a \neq 0$
Verschiebung	$f(t-t_0)$ $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\,f(t)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\,F(\omega)$ $F(\omega-\omega_0)$	
Differentiation	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ $-\mathrm{j}t\,f(t)$	$\mathrm{j}\omega\,F(\omega)$ $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\omega}$	
Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ $\frac{f(0)}{2}\,\delta(t)-\frac{f(t)}{\mathrm{j}2\pi t}$	$\pi F(0)\,\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}$ $\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega$	$F(0)=\mathrm{Re}\,F(0)$
Faltung	$(f_1 * f_2)(t)$ $2\pi\,f_1(t)\,f_2(t)$	$F_1(\omega)\,F_2(\omega)$ $(F_1 * F_2)(\omega)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$
Vertauschung	$F(t)$	$2\pi\,f(-\omega)$	

E.1.3. Korrespondenzen

Bezeichnung	Zeitfunktion	Bildfunktion	Bemerkungen
Dirac-Stoß	$\delta(t)$ 1	1 $2\pi\,\delta(\omega)$	$1=\mathrm{s}(t)+\mathrm{s}(-t)$
Einheitssprung	$\mathrm{s}(t)$ $\frac{1}{2}\left[\delta(t)-\frac{1}{\mathrm{j}\pi t}\right]$	$\pi\,\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ $\mathrm{s}(\omega)$	
Rechteckimpuls	$\mathrm{r}(t)=$ $\begin{cases}0 & (\lvert t\rvert > T/2)\\ 1 & (\lvert t\rvert \leq T/2)\end{cases}$	$T\,\mathrm{sinc}\,\frac{\omega T}{2}$	Breite T

Bezeichnung	Zeitfunktion	Bildfunktion	Bemerkungen
Signumfunktion	$\operatorname{sign}(t)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$	$\operatorname{sign}(t) = 2\,\mathrm{s}(t) - 1$
	$\frac{\mathrm{j}}{\pi t}$	$\operatorname{sign}(\omega)$	
e-Funktionen	$\mathrm{e}^{-\lvert\frac{t}{T}\rvert}$	$\frac{2T}{1+(\omega T)^2}$	
Gauss-Impuls	$\mathrm{e}^{-\pi(\frac{t}{T})^2}$	$T\,\mathrm{e}^{-\frac{(\omega T)^2}{4\pi}}$	$\alpha > 0$
Kreisfunktionen	$\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
Einschaltvorgänge	$\mathrm{s}(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega}$	$\alpha > 0$
	$\mathrm{s}(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2 + \omega_0^2}$	$\alpha > 0$
	$\mathrm{s}(t)\,\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}\,[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
	$\mathrm{s}(t)\,\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2}\,[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)] + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
Abtastfunktion	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

E.1.4. Systembeziehungen

Beziehung	Bemerkungen
$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$	$f(t) * \delta(t) = f(t)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$	$f(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2}$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \operatorname{Re}[F(\mathrm{j}\omega)]\,\mathrm{d}\omega = f(0)$	vgl. Formel E.1
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t)\,\mathrm{d}t = F(0)$	siehe auch [Pap62, 10-1]

Beziehung	Bemerkungen
$\lim\limits_{\omega\to\infty} \omega F(\mathrm{j}\omega) = f(+0)$	Bedingung: $F(\mathrm{j}\omega)$ konvergiert ohne Einsatz von $\delta(\omega)$
$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	PARSEVAL'scher Satz

E.2. Uneigentliche Integrale

Integral	Stammfunktion	Bemerkungen
$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$	$-\mathrm{e}^{-x}$	
$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$		
$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$		
V. P. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = 0$	$\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}$
V. P. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = 0$	$\ln\lvert(x-a)(x+a)\rvert$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert$
V. P. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = 0$	$\ln\lvert x-a\rvert$	Existenz nur als CAUCHY-Hauptwert

Literaturverzeichnis

[Ach67] Achieser, N. I.: *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1967.

[Ach70] Achieser, N. I.: *Elements of the Theory of Elliptic Functions*, Band 79 der Reihe *Translations of Mathematical Monographs; American Mathematical Society (AMS)*. Nauka, Moskau, 2. Auflage, 1970. Übersetzung (aus dem Russischen) H. H. McFaden, Editor B. Silver.

[AG54] Achieser, N. I. und I. M. Glasmann: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*. Akademie-Verlag, Berlin, 1954.

[AS72] Abramowitz, Milton und Irene A. Stegun (Herausgeber): *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9. Auflage, 1972.

[BC03] Brown, James Ward und Ruel V. Churchill: *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, 7. Auflage, 2003.

[Ben55] Bennett, W. R.: *Application of the Fourier Integral in Circuit Theory and Circuit Problems*. IRE Trans. Circuit Theory, 2(3):237–243, September 1955.

[Bod45] Bode, H.W.: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand Reinhold Co., London, 1945.

[Bra03] Bracewell, Ronald N.: *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 3. Auflage, 2003.

[Bud65] Budak, A.: *A Maximally Flat Phase and Controllable Magnitude Approximation*. IEEE Trans. Circuits Syst., 12(2):279–279, Juni 1965.

[Bul65] Bulirsch, Roland: *Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions*. Numerische Mathematik, 7:78–90, 1965.

[BW91] Borchardt, C. W. und K. Weierstrass (Herausgeber): *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, Band 1–7. Verlag von G. Reimer, Berlin, 1881–91.

[Cau32] CAUER, WILHELM: *The Poisson integral for functions with positive real part*. Bulletin of the American Mathematical Society, 38(10):713–717, 1932.

[Cau54] CAUER, WILHELM: *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1954.

[Cay76] CAYLEY, ARTHUR: *An elementary treatise on elliptic functions*. Cambridge: Deighton, Bell, and Co., London, 1876.

[Che95] CHEN, WAI-KAI: *The circuits and filters handbook*. CRC Press, 1995.

[FB00] FREITAG, EBERHARD und ROLF BUSAM: *Funktionentheorie 1*. Springer, 3. Auflage, 2000.

[Fri79a] FRITZSCHE, GOTTFRIED: *Entwurf passiver Analogvierpole*. Akademie Verlag, Berlin, 1979.

[Fri79b] FRITZSCHE, GOTTFRIED: *Grundlagen und Entwurf passiver Analogzweipole*. Akademie Verlag, Berlin, 1979.

[Fri81] FRITZSCHE, GOTTFRIED: *Informationsübertragung*. Verlag Technik, Berlin, 3. Auflage, 1981.

[Fri85] FRITZSCHE, GOTTFRIED: *Signale und Funktionaltransformationen*. Verlag Technik, Berlin, 1985.

[Gau13] GAUSS, C. F.: *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades (1799-1849)*. Nummer 14 in *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaft*. Akademische Verlagsanstalt mbH, Leipzig und Berlin, 3. Auflage, 1913.

[GKH+79] GELLERT, W., DR. H. KÜSTNER, DR. M. HELLWICH, H. KÄSTNER et al.: *Kleine Enzyklopädie Mathematik*. Bibliographisches Institut Leipzig, 11. Auflage, 1979.

[Gui52] GUILLEMIN, E. A.: *What is Network Synthesis?* IRE Trans. Circuit Theory, 1(1):4–19, Dezember 1952.

[Gui57] GUILLEMIN, ERNST A.: *Synthesis of Passive Networks*. John Wiley & Sons, New York, 1957.

[Gum58] GUMOWSKI, IGOR: *Some Relations Between Frequency and Time Domain Errors in Network Synthesis Problems*. IRE Trans. Circuit Theory, 5(1):66–69, März 1958.

[HH92] HÄMMERLIN, GÜNTHER und KARL-HEINZ HOFFMANN: *Numerische Mathematik*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1992.

[HK58] HENDERSON, K. W. und W. H. KAUTZ: *Transient Responses of Conventional Filters*. IRE Trans. Circuit Theory, 5(4):333–347, Dezember 1958.

[Hli54] HLI, FREDDY BA: *A General Method for Time Domain Network Synthesis*. IRE Trans. Circuit Theory, 1(3):21–28, September 1954.

[HR63] HOFSOMMER, D. J. und R. VAN DE RIET: *On the numerical calculation of elliptic integrals of the first and second kind and the elliptic functions of Jacobi*. Numerische Mathematik, 5:291–303, 1963.

[Hur00] HURWITZ, ADOLF: *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Springer, Berlin Heidelberg New York Barcelona Hongkong London Mailand Paris Singapur Tokio, 5. Auflage, 2000.

[Jac29] JACOBI, C. G. J.: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Bornträger, Königsberg, 1829.

[JE52] JAHNKE, EUGENE und FRITZ EMDE: *Tafeln höherer Funktionen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 5. Auflage, 1952.

[Kai80] KAISER, HANS: *Numerische Mathematik und Rechentechnik II*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[Kau54] KAUTZ, WILLIAM H.: *Transient Synthesis in the Time Domain*. IRE Trans. Circuit Theory, 1(3):29–39, September 1954.

[Koe74] KOENIGSBERGER, LEO: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionlehre*, Band 1. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1874.

[Kör88] KÖRNER, T.W.: *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.

[Kre79] KRESS, DIETER: *Theoretische Grundlagen der Übertragung digitaler Signale*. Akademie-Verlag, Berlin, 1979.

[Küp68] KÜPFMÜLLER, KARL: *Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung*. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 3. Auflage, 1968.

[Leg28] LEGENDRE, ADRIAN MARIE: *Traité des Fonctions Elliptiques et des intégrales eulériennes*, Band 1–3. Imprimerie de Huzard-Courcier, Paris, 1825–1828.

[Mar95] MARKO, HANS: *Systemtheorie*. Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest, 3. Auflage, 1995.

[Mei64] MEINARDUS, GÜNTER: *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. Springer, Berlin, 1964.

[Mil81] MILDENBERGER, OTTO: *Grundlagen der Systemtheorie für Nachrichtentechniker*. Studienbücher der tecnischen Wissenschaften. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1981.

[Mil92] MILDENBERGER, OTTO: *Entwurf analoger und digitaler Filter*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.

[Nee97] NEEDHAM, TRISTAN: *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, New York, 1997.

[OM74] OELSCHLÄGEL, DIETER und WOLF-GERT MATTHÄUS: *Numerische Methoden*, Band 18 der Reihe *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1974.

[Pap56] PAPOULIS, A.: *Frequency Transformations in Filter Design*. IRE Trans. Circuit Theory, 3(2):140–144, Juni 1956.

[Pap62] PAPOULIS, ATHANASIOS: *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill Electronic Sciences Series. McGraw-Hill, New York, San Francisco, London, Toronto, 1962.

[Pev92] PEVNYI, A. B.: *Computation of Jacobi elliptic functions using Gauss transformation*. Computational Maths. and Math. Physics, 32(11):1671–1674, 1992.

[Pil54] PILOTY, H.: *Zolotareffsche rationale Funktionen. - Zusammenfassender Bericht.* Zentralblatt für angewandte Math. Mech., 34(4/5):175–189, 1954.

[PP02] PAPOULIS, ATHANASIOS und S. UNNIKRISHNA PILLAI: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 4. Auflage, 2002.

[PTVF92] PRESS, WILLIAM H., SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING und BRIAN P. FLANNERY: *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1992.

[PW34] PALEY, RAYMOND E. A. C. und NORBERT WIENER: *Fourier transforms in the complex domain*. American Mathematical Society, 1934.

[SBG97] SERON, MARIA M., JULIO H. BRASLAVSKY und GRAHAM C. GOODWIN: *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Communications and Control Engineering. Springer/Telos, 1997.

[Spă73] SPĂTARU, ALEXANDRU: *Theorie der Informationsübertragung*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1973.

[SS88] SIEBER, N. und H.-J. SEBASTIAN: *Spezielle Funktionen*, Band 12 der Reihe *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 3. Auflage, 1988.

[Sto51] STORCH, L.: *Synthesis of constant-time-delay ladder networks using Bessel polynomials*. Proc. IRE, 42:1666–1675, November 1951.

[Sto92] STOPP, F.: *Operatorenrechnung*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 5. Auflage, 1992.

[SU58] SAAL, R. und E. ULBRICH: *On the Design of Filters by Synthesis*. IRE Trans. Circuit Theory, 5(4):284–327, Dezember 1958.

[Tho49] THOMSON, W. E.: *Delay networks having maximally flat frequency charactestics*. Proc. IEEE, 96:487–490, November 1949.

[Tod84] TODD, JOHN: *Applications of transformation theory: A legacy from Zolotarev (1847–1878)*. In: SINGH, S. P. et al. (Herausgeber): *Approximation Theory and Spline Functions*, Nummer 136 in *NATO ASI Ser. C*, Seiten 207–245, St. John's/Newfoundland, 1984. NATO Adv. Study Inst., D. Reidel Publishing Company.

[Tri48] TRICOMI, FRANCESCO: *Elliptische Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1948. (bearbeitet von M. Krafft).

[Tsc07] TSCHEBYSCHEFF, P. L.: *Oeuvres*, Band 1, 2. Commissionaires de l'Academie imperiale des sciences, St. Petersburg, 1899–1907. (Werke).

[VU89] VLCEK, MIROSLAV und ROLF UNBEHAUEN: *Degree, ripple, and transition width of elliptic filters*. IEEE Trans. Circuits Syst., 36(3):469–472, März 1989.

[Wax62] WAX, NELSON: *A Note on Stable, Physically Realizable, Linear, Time Invariant Systems*. IRE Trans. Circuit Theory, 9(4):405–408, Dezember 1962.

[Web91] WEBER, HEINRICH: *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1891. (Akademische Vorlesungen).

[Win54] WINKLER, STANLEY: *The Approximation Problem of Network Synthesis*. IRE Trans. Circuit Theory, 1(3):5–20, September 1954.

[Wun62] WUNSCH, GERHARD: *Moderne Systemtheorie*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1962.

[WW27] WHITTAKER, E. T. und G. N. WATSON: *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 4. Auflage, 1927. (Reprinted 1999).

[Zve67] ZVEREV, ANATOL I.: *Handbook of Filter Synthesis*. John Wiley & Sons, 1967.

Index