

## Grundlagen für Ingenieure

# Zufallsgrößen und -prozesse

Copyright © 2004–2021 Ralf Hoppe

13. Februar 2021

Das vorliegende Papier richtet sich in erster Linie an Ingenieure und Studenten technischer Fachrichtungen, die gelegentlich mit Zufallsgrößen und -prozessen in Berührung kommen und ihr Wissen in diesem Zusammenhang auffrischen wollen (oder auch müssen). Dabei werden mit Schwerpunkt die kontinuierlichen Zufallsgrößen und -prozesse betrachtet sowie (am Schluß) einige Anwendungen gegeben, mit denen ich selbst Berührung hatte. Möglicherweise besteht inhaltlich eine gewisse Tendenz zu Fachrichtungen wie der Nachrichtentechnik, Signalverarbeitung oder der theoretischen Elektrotechnik, die dann meinen Interessen bzw. meiner Ausbildung zugeschrieben werden muß.

Prinzipiell vorausgesetzt werden die Grundkenntnisse der höheren Mathematik, insbesondere der Analysis, Differential- und Integralrechnung, der FOURIER-Transformation sowie etwas Systemtheorie. Um jedoch die praktische Anwendbarkeit nicht aus den Augen zu verlieren, bleiben Beweise und manchmal auch Notationen auf einer Ebene, die nicht unbedingt von mathematischer Exaktheit geprägt ist.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Eindimensionale Zufallsgrößen</b>	<b>4</b>
1.1 Diskrete Zufallsgrößen . . . . .	4
1.2 Kontinuierliche Zufallsgrößen . . . . .	5

<b>2</b>	<b>Mehrdimensionale Zufallsgrößen</b>	<b>9</b>
2.1	Definition und Eigenschaften	9
2.2	Unabhängigkeit	11
2.3	Kenngößen	12
2.3.1	Erwartungswert	12
2.3.2	Varianz	12
2.3.3	Kovarianz	12
2.3.4	Varianz-Kovarianz-Matrix	14
2.3.5	Korrelationskoeffizient	15
<b>3</b>	<b>Funktionen von Zufallsgrößen</b>	<b>16</b>
3.1	Funktion einer eindimensionalen Zufallsgröße	16
3.2	Funktionen mehrdimensionaler Zufallsgrößen	18
3.3	Summe von Zufallsgrößen	21
3.3.1	Wahrscheinlichkeitsdichte	21
3.3.2	Erwartungswert	22
3.3.3	Varianz	23
3.3.4	Effektivwert	24
3.4	Produkt von Zufallsgrößen	26
3.4.1	Wahrscheinlichkeitsdichte	26
3.4.2	Erwartungswert	27
3.4.3	Varianz	28
3.4.4	Effektivwert	29
<b>4</b>	<b>Zufallsprozesse</b>	<b>29</b>
4.1	Einführung	29
4.2	Autokorrelationsfunktion	30
4.3	Kreuzkorrelationsfunktion	33
4.4	Spektrale Leistungsdichte	33
4.5	Spektrale Energiedichte	36
4.6	Kreuzleistungs- und Energiedichten	37
<b>5</b>	<b>Spezielle Anwendungen</b>	<b>37</b>
5.1	LTI-Systeme	37
5.2	Optimalfilter	39
5.3	Quantisierung	42
5.3.1	Quantisierungsrauschen	42

5.3.2	Signal-Rausch-Abstand (Signal-Noise-Ratio, SNR) . . . . .	43
5.4	Pulsbreitendiskriminierung . . . . .	44

## Abbildungsverzeichnis

1	Systemmodell . . . . .	16
2	Transformationsfunktion . . . . .	17
3	Übertragungskanal mit Optimalfilter . . . . .	40
4	Lineare Quantisierung . . . . .	42
5	Pulsbreitendiskriminierung . . . . .	44

## Symbolverzeichnis

$\varphi_{xx}^{(E)}$	Autokorrelationsfunktion des Energiesignals $x(t)$
$\varphi_{xx}$	Autokorrelationsfunktion des Zufallsprozesses $\mathbf{X}(t)$
$\varphi_{xy}$	Kreuzkorrelationsfunktion der Zufallsprozesse $\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)$
$\Phi(x)$	Standard-Normalverteilung
$\delta(t)$	DIRAC-Funktion
$e$	EULER'sche Zahl
$\mu$	Erwartungswert der Normalverteilung
$\sigma^2$	Varianz der Normalverteilung
*	Faltungs-Operator
$\text{Corr}(X_1, X_2)$	Korrelationskoeffizient der Zufallsgrößen $X_1, X_2$
$\text{Cov}(X_1, X_2)$	Kovarianz der Zufallsgrößen $X_1, X_2$
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsgröße $X$
$F(x)$	Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $X$
$f^{(-1)}(x)$	Umkehrfunktion von $f(x)$

## 1 Eindimensionale Zufallsgrößen

$F_X(\mathbf{x})$	Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{X}$
$h(t)$	Impulsantwort
$p(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße $X$
Pr	Wahrscheinlichkeit
$p_X(\mathbf{x})$	Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsvektors $\mathbf{X}$
SNR	Signal-Noise-Ratio (Signal-Rausch-Abstand)
$S_{xx}$	Spektrale Leistungsdichte des Zufallsprozesses $\mathbf{X}(t)$
$S_{xx}^{(E)}$	Spektrale Energiedichte des Signals $x(t)$
$S_{xy}$	Spektrale Kreuzleistungsdichte der Zufallsprozesse $\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)$
$\text{Var}(X)$	Varianz der Zufallsgröße $X$
$\tilde{X}$	Effektivwert der Zufallsgröße $X$
$X^*(j\omega)$	Konjugiert komplexe Funktion $X(-j\omega)$ im Bildbereich
$x^*(t)$	Konjugierte Funktion $x(-t)$ im Zeitbereich
$\overline{x(t)}$	Zeit-Mittelwert des Zufallssignals $x(t)$
$E(X^2)$	Quadratischer Effektivwert der Zufallsgröße $X$

## 1 Eindimensionale Zufallsgrößen

### 1.1 Diskrete Zufallsgrößen

Bei den diskreten Zufallsgrößen geht man davon aus, daß es eine Zufallsgröße  $X$  gibt, die  $N$  verschiedene diskrete Werte  $x_i$  annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert  $x_i$  angenommen wird, soll  $p_i = \text{Pr}(X = x_i)$  betragen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $X$  irgendeinen der Werte  $x_i$  annimmt ist folgerichtig das sichere Ereignis.

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

## 1.2 Kontinuierliche Zufallsgrößen

Der Erwartungswert  $E(X)$  ergibt sich aus der Wichtung aller Werte  $x_i$  mit der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens.<sup>1</sup>

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (1)$$

Die Varianz  $\text{Var}(X)$  ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert. Sie ist dadurch ein gutes Maß für die Streuung der Zufallsgröße  $X$  um ihren Erwartungswert.<sup>2</sup>

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (2)$$

Speziell für den Fall diskreter Zufallsgrößen hat sie die folgende Berechnungsvorschrift:

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^N p_i [x_i - E(X)]^2 \quad (3)$$

Für mittelwertfreie Zufallsgrößen, d. h. Zufallsgrößen für die  $E(X) = 0$  gilt, ergibt sich

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 .$$

Kann  $X$  nicht mehr nur diskrete, sondern unendlich viele verschiedene Werte  $x$  annehmen, dann kommt man zu kontinuierlichen Zufallsgrößen.<sup>3</sup>

## 1.2 Kontinuierliche Zufallsgrößen

Die Zufallsgröße  $X$  kann in diesem Fall unendlich viele Werte  $x$  aus einem endlichen oder unendlichen Intervall annehmen.<sup>4</sup> Bezieht man sich auf Grenzwerte bzw. infinitesimal große Inter-

<sup>1</sup>Oftmals auch geschrieben als typischer Operator  $EX$ ,  $E[X]$  oder  $E\{X\}$ .

<sup>2</sup>Auch häufig anzutreffen als  $\sigma^2$ ,  $DX$  oder  $D[X]$ . Ebenso oft wird auch die Größe  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$  angegeben, welche Standardabweichung bzw. Streuung genannt wird.

<sup>3</sup>Dieser Schritt stellt eine Verallgemeinerung dar – deshalb sind alle folgenden Aussagen auch wieder auf diskrete Zufallsgrößen anwendbar.

<sup>4</sup>Wobei streng gesehen ein ganz konkreter Wert  $x$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\text{Pr}(X = x) \rightarrow 0$  angenommen wird.

## 1 Eindimensionale Zufallsgrößen

valle, so kann man ausgehend von den diskreten Zufallsgrößen den Quantifizierungsbegriff der Wahrscheinlichkeit erweitern.

$$p(x) = \Pr\left(x - \frac{dx}{2} \leq X \leq x + \frac{dx}{2}\right)$$

Die (jetzt) kontinuierliche Größe  $p$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsgröße  $X$  einen Wert  $x$  in der Umgebung  $dx$  annimmt. Dadurch erhält  $p$  differentiellen Charakter, weshalb  $p(x)$  auch als Dichtefunktion bezeichnet wird. Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr$ , daß  $X$  einen Wert innerhalb eines Intervalls  $[a, b]$  annimmt, muß nun durch Integration bestimmt werden.

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx \quad (4)$$

Wie bei den diskreten Zufallsgrößen muß die Wahrscheinlichkeit, daß  $X$  einen Wert im Intervall  $(-\infty, \infty)$  annimmt, Eins sein.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (5)$$

Wegen der Notwendigkeit in Gleichung 4 zu integrieren, wird oft die sogenannte Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Zufallsgröße  $X$  angegeben.

$$\Pr(-\infty \leq X \leq x) = \Pr(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du \quad (6)$$

Man kann sich die Verteilungsfunktion nach dieser Formel auch als infinitesimale Addition aller Einzelwahrscheinlichkeiten  $p(x)$  von  $-\infty$  bis  $x$  vorstellen, also in "Summe"  $\Pr(X \leq x)$ .  $F(x)$  ist deshalb auch immer eine monoton steigende Funktion mit den Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte im Umkehrschluß:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (7)$$

Die Existenz des uneigentlichen Integrals in Definitionsgleichung 6 vorausgesetzt, kann die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  jetzt sehr einfach berechnet werden.

$$\begin{aligned} \Pr(a \leq x \leq b) &= \int_a^b p(x) dx \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[ \int_c^b p(x) dx - \int_c^a p(x) dx \right] \\ \Pr(a \leq x \leq b) &= F(b) - F(a) \end{aligned} \quad (8)$$

Der Erwartungswert ergibt sich wie bei den diskreten Zufallsgrößen – jetzt wird aber jeder Wert mit der differentiellen Wahrscheinlichkeit seines Auftretens multipliziert.<sup>5</sup>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (9)$$

In ähnlicher Art und Weise (und unter Berücksichtigung von Formel 5) ergibt sich für die Varianz:<sup>6</sup>

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \quad (10)$$

und im weiteren

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) - 2x E(X) p(x) + E^2(X) p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx + E^2(X) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - E^2(X). \end{aligned}$$

Die Varianz ist also der quadratische Erwartungswert abzüglich des Quadrats des Erwartungswertes der Zufallsgröße.

<sup>5</sup>Mit Hilfe von Gleichung 7 kann man diese Formel als STIELTJES-Integral darstellen [Gne58, § 25]:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ .

<sup>6</sup>Erwartungswert, Varianz und alle weiteren Integrale der Form  $\int x^i p(x) dx$  nennt man (mit  $i = 1, 2, \dots$ ) Momente der Zufallsgröße  $X$ .

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad (11)$$

Umgekehrt gilt:

$$E(X^2) = \text{Var}(X) + E^2(X) . \quad (12)$$

Für Zufallsgrößen mit verschwindendem Mittelwert ist die Varianz gleich dem Quadrat des Effektivwertes.<sup>7</sup>

$$\text{Var}(X) \stackrel{E(X)=0}{=} E(X^2) = \tilde{X}^2 \quad (13)$$

### Gleichverteilung

Eine der einfachsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist die sogenannte Gleichverteilung. Sie hat auf dem Intervall  $[a, b]$  eine konstante Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x)$  und ist außerhalb dessen Null. Wegen der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_a^b p(x) dx = 1$$

muß sie folgender Gleichung für die Dichtefunktion genügen:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (14)$$

Der Erwartungswert nach Formel 9 bestimmt sich aus den Intervallgrenzen zu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2} . \quad (15)$$

Die Varianz ermittelt sich nach Formel 10 ebenfalls relativ einfach.

<sup>7</sup>Der Effektivwert einer (oftmals elektrischen) Größe ist als Wurzel aus dem Erwartungswert des Quadrats der Zufallsgröße  $X$  definiert:  $\tilde{X}^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$ .



$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= \int_a^b \frac{[x - E(X)]^2}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} [x - E(X)]^3 \Big|_a^b \\
&= \frac{1}{3(b-a)} \{ [b - E(X)]^3 - [a - E(X)]^3 \} = \frac{1}{3(b-a)} \left[ \left( \frac{b-a}{2} \right)^3 - \left( \frac{a-b}{2} \right)^3 \right] \\
\text{Var}(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned} \tag{16}$$

## 2 Mehrdimensionale Zufallsgrößen

### 2.1 Definition und Eigenschaften

Ein Vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  wird  $n$ -dimensionale Zufallsgröße genannt, wenn jede der Einzelgrößen  $X_k$  eine Zufallsgröße (über der gleichen Ereignisalgebra<sup>8</sup>) ist. Die verbundene bzw. gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Pr(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

liefert zu jedem Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[(X_1 < x_1) \cap (X_2 < x_2) \cap \dots \cap (X_n < x_n)]$ .

Der Zusammenhang zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion hat auch für den Fall einer mehrdimensionalen Zufallsgröße Bestand, nur daß die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ebenfalls mehrdimensional ist. Für kontinuierliche Zufallsgrößen gibt sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $\mathbf{X}$  im differentiellen Intervall  $(x_1 \pm dx_1/2, x_2 \pm dx_2/2, \dots, x_n \pm dx_n/2)$  liegt. Integration dieser infinitesimalen Wahrscheinlichkeiten von  $-\infty$  bis  $\mathbf{x}$  ergibt dann wieder die Verteilungsfunktion von  $\mathbf{X}$ .

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\mathbf{X}}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \dots du_2 du_1 \tag{17}$$

Umgekehrt läßt sich durch partielle Differentiation nach allen  $x_i$  daraus die Dichtefunktion ermitteln.

<sup>8</sup>Eine Ereignisalgebra beschreibt die zu einem Vorgang bzw. System (mit zufälligem Ergebnis) gehörigen Einzelergebnisse, denen man eine Wahrscheinlichkeit zuordnen möchte.

## 2 Mehrdimensionale Zufallsgrößen

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \quad (18)$$

Ähnlich zum eindimensionalen Fall lassen sich deshalb die folgenden Eigenschaften von  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  feststellen:

- Für alle  $x_i$  (mit  $1 \leq i \leq n$ ) gilt:  $0 \leq F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$ .
- Es existiert der Grenzwert  $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots = \lim_{x_n \rightarrow -\infty} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ .
- Für  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rightarrow \infty$  (d. h. alle, außer  $x_i$ ) entartet  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  zu einer eindimensionalen Randverteilung  $F_i(x_i)$ , die nur noch von  $x_i$  abhängt und die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(X_i < x_i)$  ausdrückt.<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \cdots du_{i+1} du_i du_{i-1} \cdots du_2 du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \cdots du_{i+1} du_{i-1} \cdots du_2 du_1 du_i \end{aligned}$$

Partielle Differentiation der Randverteilung  $F_i(x_i)$  nach  $x_i$  führt zur (Rand-) Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$p_i(x_i) = \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_{i+1} dx_{i-1} \cdots dx_2 dx_1$$

Für den zweidimensionalen Fall ( $n = 2$ ) lassen sich die Gleichungen folgendermaßen konkretisieren:

$$F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u_1, u_2) du_2 du_1 \quad (19)$$

$$p_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, x_2) dx_2. \quad (20)$$

<sup>9</sup>Hier wird ein Ergebnis des Satzes von FUBINI angewendet, wonach die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist.

## 2.2 Unabhängigkeit

Als (vollständig) unabhängig werden Zufallsgrößen bezeichnet, wenn deren Verteilungsfunktion vollständig faktorisiert ist.

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) &= \Pr(X_1 < x_1) \Pr(X_2 < x_2) \cdots \Pr(X_n < x_n) \\ F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) &= F_1(x_1) F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)\end{aligned}$$

Grundvoraussetzung für diese Äquivalenz ist die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse (beispielsweise  $A$  und  $B$ ), welche lautet:

$$\Pr(B | A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} . \quad (21)$$

Dabei ist  $\Pr(B | A)$  die (bedingte) Wahrscheinlichkeit daß Ereignis  $B$  eintritt, unter der Voraussetzung das  $A$  schon eingetreten ist.  $\Pr(A \cap B)$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $A$  UND  $B$  eintreten und  $\Pr(A)$  die Wahrscheinlichkeit für das (bedingungslose) Eintreten von Ereignis  $A$ .

Umgestellt nach  $\Pr(A \cap B)$  ergibt sich der sogenannte Multiplikationssatz.

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B | A) = \Pr(B) \Pr(A | B) \quad (22)$$

Mit dieser Formel wird auch anschaulich klar, weshalb die bedingte Wahrscheinlichkeit genau so wie in Gleichung 21 definiert ist – sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Ereignis  $A$  UND  $B$  unter der Voraussetzung, daß  $A$  eingetreten und von  $B$  (unter dieser Bedingung) gefolgt ist.

Besteht eine solche Abhängigkeit nicht, dann gilt  $\Pr(A | B) = \Pr(A)$  bzw.  $\Pr(B | A) = \Pr(B)$  und deshalb:<sup>10</sup>

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B) .$$

---

<sup>10</sup>Grundlagen der Kombinatorik, Bool'sche Algebra sowie die Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten (Produkt:  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$ , Summe:  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$ , Komplement:  $\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A)$ ) werden vorausgesetzt.

## 2 Mehrdimensionale Zufallsgrößen

### 2.3 Kenngrößen

#### 2.3.1 Erwartungswert

Konsequent kann man auch die Definition des Erwartungswertes einer  $n$ -dimensionalen Zufallsgröße aus dem der eindimensionalen Größe ableiten, wenn man außerdem Gleichung 17 bzw. den Ideenkreis um sie herum, berücksichtigt [Gne58, § 25 ff.].

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 \quad 1 \leq i \leq n$$

Man muß allerdings hinzufügen, daß es sich um den Erwartungswert der Randverteilung für  $X_i$  handelt. Praktisch ergibt sich dadurch ein Erwartungswerte-Vektor.

$$E(\mathbf{X}_i) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_i) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

#### 2.3.2 Varianz

Die Varianz(en) einer  $n$ -dimensionalen Zufallsgröße können aus der allgemeinen Definitionsgleichung 2 in Verbindung mit dem Erwartungswert (von eben) ermittelt werden.

$$\text{Var}(X_i) = E[X_i - E(X_i)]^2 \quad 1 \leq i \leq n$$

Auch hier muß man hinzufügen, daß es sich um die Varianz einer Randverteilung handelt.

#### 2.3.3 Kovarianz

Sind  $X_1$  und  $X_2$  zwei (nicht notwendigerweise unabhängige) Zufallsgrößen, dann nennt man die folgende Größe Kovarianz von  $X_1$  und  $X_2$ .

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\} \quad (23)$$

Die Kovarianz  $\text{Cov}(X_1, X_2)$  kann auch noch anders ausgedrückt werden (Verschiebungssatz), wenn man

- die Formeln 43 und 50 für den Erwartungswert von Produkten bzw. Summen von Zufallsgrößen berücksichtigt;
- bedenkt, daß  $E(X_1)$  und  $E(X_2)$  quasi konstante Faktoren sind;
- die Trivialität  $E(1) = 1$  anwendet.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2 - X_1 E(X_2) - X_2 E(X_1) + E(X_1) E(X_2)] \\ &= E(X_1 X_2) - E(X_1) E(X_2) \end{aligned} \quad (24)$$

Ist eine der beiden Zufallsgrößen mittelwertfrei, dann entspricht die Kovarianz dem Erwartungswert des Produktes der beiden Größen.

$$\text{Cov}(X_1, X_2) \stackrel{E X_i = 0}{=} E(X_1 X_2), \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

Unter diesen Bedingungen spricht man auch von der Korrelation beider Zufallsgrößen (vgl. Abschnitte 3.4 und 4).

Im Fall  $X = X_1 = X_2$  entartet die Kovarianz zur Varianz (siehe Formel 11).

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

Für kontinuierliche Zufallsgrößen kann die Kovarianz wie folgt konkretisiert werden:

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1)][x_2 - E(X_2)] p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (26)$$

Dabei geht man davon aus, daß der Vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  eine zweidimensionale Zufallsgröße mit der Dichtefunktion  $p(x_1, x_2)$  ist. Sind die Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  stochastisch unabhängig, dann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte faktorisiert in

## 2 Mehrdimensionale Zufallsgrößen

$$p_X(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$$

und deshalb auch das Doppelintegral von Gleichung 26.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_1, X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1)][x_2 - E(X_2)] p_1(x_1)p_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - E(X_2)] p_2(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1)] p_1(x_1) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - E(X_1)] p_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [x_2 - E(X_2)] p_2(x_2) dx_2\end{aligned}$$

Wegen der allgemeingültigen Beziehung

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)] p(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} E(X) p(x) dx \\ &= E(X) - E(X) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 0\end{aligned}$$

verschwinden aber beide Faktoren, d. h. die Kovarianz (und der Korrelationskoeffizient) unabhängiger Zufallsgrößen ist grundsätzlich Null. Aus Gleichung 24 folgt unter dieser Bedingung ferner:

$$E(X_1 X_2) \stackrel{\text{Cov}(X_1, X_2)=0}{=} E(X_1) E(X_2), \quad (27)$$

was als Kriterium unkorrelierter Zufallsgrößen in seiner Umkehrung ebenfalls verwendbar ist.

### 2.3.4 Varianz-Kovarianz-Matrix

Für einen mehrdimensionalen Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  kann man eine sogenannte Varianz-Kovarianz-Matrix  $\mathbf{C}$  angeben,

$$c_{i,k} = \text{Cov}(X_i, X_k) = E\{[X_i - E(X_i)][X_k - E(X_k)]\}$$

deren Elemente  $c_{i,k}$  die Kovarianz zwischen der Zufallsgröße  $X_i$  und  $X_k$  repräsentieren.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_2, X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_1) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_1, X_n) & \text{Cov}(X_2, X_n) & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist

- quadratisch,
- symmetrisch (wegen  $\text{Cov}(X_i, X_k) = \text{Cov}(X_k, X_i)$ ),
- und hat die Hauptdiagonalwerte  $\text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}(X_i)$ .

### 2.3.5 Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen.<sup>11</sup>

$$\text{Corr}(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}} \quad (28)$$

Zu den Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten:

1. Wegen der Ungleichung  $|\text{Cov}(X_1, X_2)| \leq \sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2)}$  gilt immer:  $-1 \leq \text{Corr}(X_1, X_2) \leq +1$ .
2. Linear abhängige Zufallsgrößen ( $X_2 = aX_1 + b$ ) führen immer zu:  $\text{Corr}(X_1, X_2) = \pm 1$ .
3. Von unkorrelierten Zufallsgrößen spricht man, wenn der Korrelationskoeffizient identisch Null ist:  $\text{Corr}(X_1, X_2) = 0$ .<sup>12</sup>

Für mittelwertfreie Zufallsgrößen reduzieren sich Kovarianz und Varianz entsprechend der Formeln 27 und 13 auf  $\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2)$  und  $\text{Var}(X) = E(X^2) = \bar{X}^2$  und deshalb der Korrelationskoeffizient auf

$$\text{Corr}(X_1, X_2) \stackrel{E X_i = 0}{=} \frac{E(X_1 X_2)}{\sqrt{E(X_1^2) E(X_2^2)}}. \quad (29)$$

<sup>11</sup>In dieser Form wird  $\text{Corr}(X_1, X_2)$  auch als PEARSON- oder Produkt-Moment-Korrelationskoeffizient bezeichnet.

<sup>12</sup>Unkorrelierte Zufallsgrößen sind nicht notwendigerweise stochastisch unabhängig, umgekehrt ist die Aussage jedoch gültig.

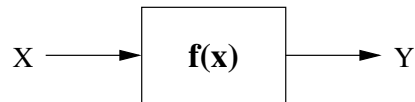


Abbildung 1: Systemmodell

## 3 Funktionen von Zufallsgrößen

### 3.1 Funktion einer eindimensionalen Zufallsgröße

Die Transformation der Verteilung einer kontinuierlichen Zufallsgröße  $X$  in eine andere Verteilung, die der Zufallsgröße  $Y$  zugeordnet sein soll, wird in der Praxis häufig verlangt. Anwendungen in der Nachrichtentechnik und Signalverarbeitung sind unter anderem:

- Berechnung des Quantisierungsrauschens bei nichtlinearen Quantisierungskennlinien (z. B.  $\mu$ - oder  $A$ -Kennlinie);
- Transformation von Zufallszahlen-Verteilungen;
- Transformation von Rauschverteilungen (Weiß $\Rightarrow$ Rosa);
- oder die Bestimmung der Amplitudenverteilung analytischer Funktionen [Sch90, 2.5].

Als Modell soll die Transformation der Eingangsgröße  $X$  in die Ausgangsgröße  $Y$  durch ein System mit der Übertragungsfunktion  $y = f(x)$  angenommen werden (vgl. Abbildung 1).

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $X$  soll  $p_X(x)$ , die für  $Y$  entsprechend  $p_Y(y)$  sein. Außerdem wird vorausgesetzt, daß  $f(x)$  im Intervall, den  $X$  annehmen kann, monoton verläuft.<sup>13</sup> Angenommen nun,  $Y$  nimmt den Wert  $y$  an, so ist diesem eindeutig ein Wert  $x$  zugeordnet, der von der Zufallsgröße  $X$  angenommen wird. Die Dichtefunktion  $p_X(x)$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $X$  einen Wert im Intervall  $[x - dx/2, x + dx/2]$  annimmt. Unter dieser Bedingung nimmt  $Y$  (nach Abbildung 2) aber einen Wert im Intervall  $[y - dy/2, y + dy/2]$  mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an.

$$\begin{aligned} |d\Pr_X(x)| &= |d\Pr_Y(y)| \\ p_X(x) |dx| &= p_Y(y) |dy| \end{aligned} \tag{30}$$

---

<sup>13</sup>Wenn die Transformationsfunktion nicht monoton verläuft, ist die ein-eindeutige Zuordnung von  $X$  und  $Y$  unmöglich. In solchen Fällen muß man die Mehrdeutigkeit in die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen mit einbeziehen (siehe d. h. Abschnitt 3.4, was das Produkt von Zufallsgrößen angeht).



### 3.1 Funktion einer eindimensionalen Zufallsgröße

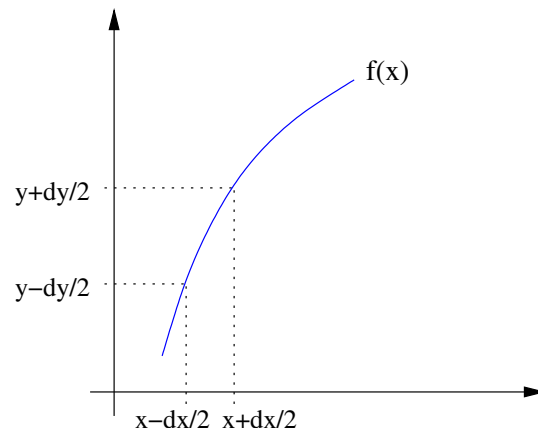


Abbildung 2: Transformationsfunktion

Durch die Streckung (Stauchung) des Intervalls  $dx$  über  $f(x)$  auf  $dy$  muß auch die Wahrscheinlichkeitsdichte im entsprechenden Streckungsverhältnis  $|dx/dy|$  gegenüber  $p_X(x)$  ab- bzw. zunehmen.

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|f'(x)|} = p_X(x) |h'(y)| = p_X[h(y)] |h'(y)| \quad (31)$$

$h(y)$  ist hierbei die Umkehrfunktion von  $f(x)$  und  $h'(y)$  deren Ableitung nach  $y$ .

Mit  $|f'(x)| = |dy/dx|$ , also

$$p_Y(y) |dy| = p_X(x) |dx|$$

ist der Zusammenhang zwischen den Verteilungsfunktionen  $F_X(x)$  und  $F_Y(y)$  nun relativ einfach durch Integration beider Seiten bzw. Anwendung von Definitionsgleichung 6 abzuleiten.

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y p_Y(u) du = \int_{h(-\infty)}^{h(y)} p_X(u) du$$

$$F_Y(y) = F_X[h(y)] - F_X[h(-\infty)]$$

Da an der unteren Grenze immer  $F_X(a) = 0$  gilt,<sup>14</sup> ergibt sich:

<sup>14</sup>Existiert  $h(-\infty)$  nicht bzw. ist das Transformationsintervall eingeschränkt auf  $a \leq x \leq b$ , so ist dieser Term durch  $a$  zu ersetzen.

### 3 Funktionen von Zufallsgrößen

$$F_Y(y) = F_X[h(y)] \quad (32)$$

Die wesentliche Erkenntnis daraus ist, daß die Verteilungsfunktion direkt über die Kennlinie  $f(x)$ , die Wahrscheinlichkeitsdichte jedoch über  $|f'(x)|$  transformiert wird [?, A.2.1.7.5], [PP02, 5], [Spä73, 2.7.1].

#### Trigonometrische Übertragungsfunktion (bei Gleichverteilung)

Die Eingangsgröße  $X$  soll in  $[-\pi/2, +\pi/2]$  gleichverteilt mit  $p_X(x) = 1/\pi$  sein. Die Transformationsfunktion ist  $y = f(x) = \sin x$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $-1 \leq Y \leq 1$  ergibt sich zu

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{|f'(x)|} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

#### Lineare Übertragungsfunktion

Die Eingangsgröße  $X$  soll die nicht genauer definierte Dichtefunktion  $p_X(x)$  besitzen. Die Transformationsfunktion ist eine lineare Abbildung der Form  $y = Ax$ . Dann gilt für die Dichtefunktion:

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{f'(x)} = \frac{p_X(y/A)}{|A|}. \quad (33)$$

### 3.2 Funktionen mehrdimensionaler Zufallsgrößen

Ausgehend von der eindimensionalen Transformation einer Zufallsgröße (im vorherigen Abschnitt) läßt sich das Problem von Funktionen mehrdimensionaler Zufallsgrößen wie folgt formulieren:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$  des Zufallsvektors  $\mathbf{Y}$ , die sich aus der Transformation des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  durch reelle Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dergestalt

### 3.2 Funktionen mehrdimensionaler Zufallsgrößen

$$\begin{aligned} Y_1 &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

ergibt.

Setzen wir (der Kürze halber) sowohl bei Variablen als auch Funktionen Vektorschreibweisen der Art

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad \mathbf{X} = \mathbf{f}^{(-1)}(\mathbf{Y}) = \mathbf{h}(\mathbf{Y}) \quad (34)$$

ein, dann wird schon auf Symbolebene die Ähnlichkeit zum eindimensionalen Fall erkennbar. Aus diesem Grund wird hier der Ansatz der formalen Erweiterung von Gleichung 30 auf  $n$  Dimensionen verfolgt, wobei wir (zuerst) jegliche Betragszeichen ignorieren.<sup>15</sup>

$$p_X(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = p_Y(\mathbf{y}) dy_1 dy_2 \cdots dy_n \quad (35)$$

Dabei kann man sich weiterhin von der anschaulichen Darstellung in Abbildung 2 leiten lassen, muß die Transformation von eindimensionalen, differentiellen Größen ( $dx \xrightarrow{f(x)} dy$ ) nun aber auf Gebiete der Dimension  $n$  ausdehnen ( $d\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{f}(\mathbf{x})} d\mathbf{y}$ ).

Den Zusammenhang zwischen den Inhaltsmomenten<sup>16</sup>  $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$  und  $dy_1 dy_2 \cdots dy_n$  gibt uns die aus der Integralrechnung bekannte Funktional- bzw. JACOBI-Determinante  $|\mathbf{J}|$ .<sup>17</sup>

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_n = |\mathbf{J}_h| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \quad (36)$$

Die ihr zugrunde liegende JACOBI-Matrix hat eine  $n \times n$  Struktur, in der jedes Element die partielle Ableitung der Funktion  $h_k(y_1, y_2, \dots, y_n)$  nach einer Variablen  $y_i$  enthält. Für den Funktionsvektor  $\mathbf{h}$  hat sie das folgende Aussehen:

<sup>15</sup>Auch Gleichung 31 kann als Ausgangspunkt dienen – nur ist man dann sofort mit der Interpretation von  $|h'(y)| \rightarrow |\mathbf{h}'(\mathbf{y})|$  konfrontiert.

<sup>16</sup>Momente niedriger Ordnung sind z. B. Flächenmomente ( $dF = dx dy$ ) oder Volumenmomente ( $dV = dx dy dz$ ).

<sup>17</sup>Substitutionssatz für Mehrfach-Integrale:  $\int_{h(B)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B f[h(\mathbf{z})] |\mathbf{J}_h| d\mathbf{z}$ .

### 3 Funktionen von Zufallsgrößen

$$|\mathbf{J}_h| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_n(\mathbf{y})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_n(\mathbf{y})}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

wobei wir die Betragszeichen sowohl als Kennzeichnung für eine Determinante als auch den echten Betrag des Ergebnisses werten wollen. Vergleicht man nun Formel 35 und 36, dann wird der Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten von  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  sofort offensichtlich [PP02, 6], [Ros04, 2.5], [Gne58, § 23].

$$p_Y(\mathbf{y}) = |\mathbf{J}_h| p_X(\mathbf{x}) \quad (37)$$

Die ebenfalls interessante Verteilungsfunktion von  $\mathbf{Y}$  kann man z. B. aus Definitionsgleichung 17 durch Einsetzen von Formel 35 gewinnen.<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} F_Y(\mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} \dots \int_{-\infty}^{y_n} p_Y(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n \dots du_2 du_1 \\ &= \underbrace{\int \dots \int}_B p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 \end{aligned} \quad (38)$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich dabei aus der Bedingung  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) < y_k$  für das Integrationsgebiet  $B$  (vgl. Definition der Verteilungsfunktion:  $\Pr(Y_k < y_k)$ ).

Auf der Grundlage von Formel 35 lassen sich nun auch die Erwartungswerte  $E(Y_i)$  berechnen.

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} y_i p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \dots dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 \end{aligned}$$

<sup>18</sup>Man kann sich die Verteilungsfunktion auch hier wieder als infinitesimale Addition aller Wahrscheinlichkeiten  $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  über das gesamte Gebiet  $B$ , für welches  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) < y_k$  gilt, vorstellen.

Für den zweidimensionalen Spezialfall  $Y = f(X_1, X_2)$  bestimmt sich der Erwartungswert wie folgt:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) p_X(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (39)$$

### 3.3 Summe von Zufallsgrößen

#### 3.3.1 Wahrscheinlichkeitsdichte

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Summe von zwei Zufallsgrößen  $Y = X_1 + X_2$  zu bestimmen, interpretieren wir sie einfach als Funktion  $f(X_1, X_2)$  im Sinne des vorigen Abschnitt. Da wir nur *eine* Ergebnisgröße, nämlich  $Y$  haben, müssen wir die (nach Gleichung 34) notwendige Ordnung  $n = 2$  für  $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$  "künstlich" erzeugen. Dazu benennen wir  $Y$  in  $Y_1 = f_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$  um und definieren eine zweite Funktion  $Y_2 = f_2(X_1, X_2) = X_1 - X_2$ . Bei der Auswahl von  $f_2$  soll nur Bedingung sein, daß diese Funktion differenzierbar, umkehrbar und nicht linear abhängig von  $f_1$  ist.<sup>19</sup>

Zuerst werden die Umkehrfunktionen  $\mathbf{h}(\mathbf{Y})$  ermittelt

$$\begin{aligned} X_1 &= h_1(Y_1, Y_2) = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \\ X_2 &= h_2(Y_1, Y_2) = \frac{Y_1 - Y_2}{2} \end{aligned}$$

und mit deren Hilfe die Funktionaldeterminante gewonnen.

$$|\mathbf{J}_h| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Da in diesem Fall nur lineare Funktionen beteiligt sind, ist die Determinante  $|\mathbf{J}_h|$  eine Konstante. Wir reduzieren sie (konform zu Abschnitt 3.2) auf ihren Absolutwert um dann Gleichung 37 anzuwenden.

$$p_Y(y_1, y_2) = |\mathbf{J}_h| p_X(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} p_X(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} p_X\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

<sup>19</sup>Hilfreich ist natürlich die Wahl einer möglichst einfachen Funktion.

### 3 Funktionen von Zufallsgrößen

Da die Hilfsgröße  $Y_2$  nicht von Interesse ist, müssen wir sie als Zufallsgröße “ausblenden”, d. h. aus der verbundenen Dichtefunktion  $p_Y(y_1, y_2)$  die (eindimensionale) Randdichte von  $Y_1$  (nach Formel 20) berechnen. Bei diesem Schritt können wir auch gleich wieder  $Y_1$  in  $Y$  umbenennen, denn auf diese Größe kam es uns ja an.

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y, y_2) dy_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} p_X\left(\frac{y+y_2}{2}, \frac{y-y_2}{2}\right) dy_2$$

Die abschließende Substitution  $z = (y + y_2)/2$ , d. h.  $y_2 = 2z - y$  und  $dy_2 = 2dz$  führt zum Ergebnis.

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(z, y - z) dz \quad (40)$$

Sind  $X_1$  und  $X_2$  sogar stochastisch unabhängig, d. h. es gilt  $p_X(x_1, x_2) = p_1(x_1) p_2(x_2)$ , so vereinfacht sich Gleichung 40 zu:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(z) p_2(y - z) dz \quad (41)$$

Nach dieser Formel ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen also genau die Faltung der einzelnen Dichtefunktionen.<sup>20</sup>

$$p_Y(y) = (p_1 * p_2)(y) \quad (42)$$

Für die Summe von  $n$  unabhängigen Zufallsgrößen gilt demzufolge:

$$p_Y(y) = (p_1 * p_2 * p_3 * \cdots * p_{n-1} * p_n)(y) .$$

#### 3.3.2 Erwartungswert

Ausgangspunkt zur Bestimmung des Erwartungswertes der Zufallsgröße  $Y = X_1 + X_2$  ist dessen Definitionsgleichung 9.

<sup>20</sup>Faltung zweier Funktionen:  $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ .

$$E(Y) = E(X_1 + X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy$$

Einsetzen der Wahrscheinlichkeitsdichte von  $Y$  entsprechend Formel 40 ergibt:

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} y \int_{x_1=-\infty}^{\infty} p_X(x_1, y - x_1) dx_1 dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_X(x_1, x_2) dx_2 dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, x_2) dx_2 dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 . \end{aligned}$$

Die inneren Integrale in beiden Summanden stellen nach Gleichung 20 aber genau die Randdichten  $p_1(x_1)$  und  $p_2(x_2)$  der jeweils anderen Zufallsgröße dar.

$$E(X_1 + X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1) dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_2(x_2) dx_2$$

Demzufolge ist der Erwartungswert der Summe zweier Zufallsgrößen unabhängig von der (verbundenen) Wahrscheinlichkeitsdichte einfach die Summe der einzelnen Erwartungswerte [Gne58, § 27].<sup>21</sup>

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \quad (43)$$

### 3.3.3 Varianz

Die Varianz der Summe zweier (möglicherweise abhängiger) Zufallsgrößen kann nun ausgehend von Gleichung 11 bestimmt werden.

<sup>21</sup>Gleichgültig ob beide Zufallsgrößen abhängig oder unabhängig sind.

### 3 Funktionen von Zufallsgrößen

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= E(X_1 + X_2)^2 - E^2(X_1 + X_2) \\ &= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2E(X_1X_2) - [E(X_1) + E(X_2)]^2 \\ &= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2E(X_1X_2) - E^2(X_1) - E^2(X_2) - 2E(X_1)E(X_2) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2[E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)] .\end{aligned}\tag{44}$$

Mit einem kleinen Rückgriff auf Abschnitt 2.3.3 kann man die letzte Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)\tag{45}$$

Sind die Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig, dann gilt  $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$  (vgl. Abschnitt 2.3.3) und deshalb für die Varianz:

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) .$$

#### 3.3.4 Effektivwert

Ausgehend von der Definition des Effektivwertes nach Gleichung 12 kann man hier Zwischenformel 44 des letzten Abschnitts nutzbringend einsetzen.

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \text{Var}(Y) + E^2(Y) \\ &= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2E(X_1X_2) \\ \tilde{Y}^2 &= \tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + 2E(X_1X_2)\end{aligned}$$

Sind beide Zufallsgrößen sowohl unabhängig als auch (zumindest eine) mittelwertfrei,<sup>22</sup> dann berechnet sich der Effektivwert der Summengröße wie folgt:

$$\tilde{Y} \stackrel{E(X_i)=0}{=} \sqrt{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2}, \quad i = 1, 2 .$$

<sup>22</sup>Verschwindende Kovarianz, d. h. Gleichung 27 hat Gültigkeit:  $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$ .



Induktive Fortsetzung ergibt für den Effektivwert der Summe  $n$  unabhängiger, mittelwertfreier Zufallsgrößen in diesem Spezialfall:

$$\tilde{Y} = \sqrt{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{X}_3^2 + \dots + \tilde{X}_{n-1}^2 + \tilde{X}_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i^2}.$$

### Superposition bei Normalverteilung

Zwei unabhängige Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  seien normalverteilt

$$p_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right], \quad i = 1, 2 \quad (46)$$

und additiv überlagert.<sup>23</sup> Die Berechnung der resultierenden Dichtefunktion  $p_Y(y)$  kann dann durch Anwendung der Faltungsformel 41 erfolgen. Relativ einfach läßt sich eine Faltung mit Hilfe der FOURIER-Transformation berechnen. Dazu werden die Dichtefunktionen  $p_i(x)$  in den Bildbereich transformiert

$$\mathcal{F}\{p_i(x)\} = e^{-\mu_i} e^{-2(\pi\sigma_i f)^2}$$

und dann einfach multipliziert (Faltungssatz).

$$\mathcal{F}\{p_Y(y)\} = e^{-(\mu_1+\mu_2)} e^{-2(\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}f)^2}$$

Die Rücktransformation von  $\mathcal{F}\{p_Y(y)\}$  liefert sofort die Lösung.

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad \text{mit } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Die Summe zweier normalverteilter Zufallsgrößen mit den Erwartungswerten  $\mu_i$  und den Varianzen  $\sigma_i^2$  ist wieder normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu_1 + \mu_2$  und der Varianz  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .<sup>24</sup>

<sup>23</sup>Gauss-Verteilung bzw. Glockenkurve mit  $E(X) = \mu$  und  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .

<sup>24</sup>Die Ergebnisse für den Erwartungswert und die Varianz bestätigen nur die allgemeingültigen Gleichungen 43 und 45.

### 3.4 Produkt von Zufallsgrößen

#### 3.4.1 Wahrscheinlichkeitsdichte

Um die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Produkts von zwei Zufallsgrößen  $Y = X_1 X_2$  zu bestimmen, interpretieren wir dieses Produkt wieder als Funktion  $f(X_1, X_2)$ . Da wir auch hier nur *eine* Ergebnisgröße, nämlich  $Y$ , haben, müssen wir die Darstellung  $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$  wieder “künstlich” erzeugen. Dazu benennen wir  $Y$  in  $Y_1 = f_1(X_1, X_2) = X_1 X_2$  um und definieren eine zweite Funktion  $Y_2 = f_2(X_1, X_2) = X_1 / X_2$ .

Auch diesmal ermitteln wir zuerst die Umkehrfunktionen  $\mathbf{h}(\mathbf{Y})$ , beschränken uns aber auf die positiven Werte von  $X_1$  und  $X_2$  sowie positive Radikanden.

$$\begin{aligned} X_1 &= h_1(Y_1, Y_2) = \sqrt{Y_1 Y_2} \\ X_2 &= h_2(Y_1, Y_2) = \sqrt{Y_1 / Y_2} \end{aligned}$$

Den Absolutwert der zugehörigen Funktionaldeterminante

$$\mathbf{J}_h = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{y})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{y})}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} & \sqrt{\frac{y_1}{y_2}} \\ \frac{1}{\sqrt{y_1 y_2}} & -\sqrt{\frac{y_1}{y_2^3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2y_2}$$

wenden wir wieder auf Gleichung 37 an.

$$p_Y(y_1, y_2) = |\mathbf{J}_h| p_X(x_1, x_2) = \frac{p_X(x_1, x_2)}{2y_2} = \frac{1}{2y_2} p_X\left(\sqrt{y_1 y_2}, \sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\right)$$

Da die Zufallsgröße  $Y_2$  auch hier nicht von Interesse ist, müssen wir sie wieder “ausblenden”, d. h. aus der verbundenen Dichtefunktion  $p_Y(y_1, y_2)$  die (eindimensionale) Randdichte von  $Y_1$  berechnen. Dabei benennen wir auch gleich wieder  $Y_1$  in  $Y$  um.

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2y_2} p_X\left(\sqrt{y y_2}, \sqrt{\frac{y}{y_2}}\right) dy_2$$

Die abschließende Substitution  $z = \sqrt{y y_2}$ , d. h.  $\sqrt{y/y_2} = y/z$  und  $2 dz = dy_2 \sqrt{y/y_2} = y/z dy_2$  ergibt:

$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{y} \cdot \frac{1}{y_2} p_X\left(z, \frac{y}{z}\right) dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} z^{-1} p_X(z, y/z) dz .
 \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Produktes zweier (abhängiger) Zufallsgrößen gilt also:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_X(z, y/z)}{z} dz . \quad (47)$$

Sind  $X_1$  und  $X_2$  stochastisch unabhängig, d. h. es gilt  $p_X(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$ , so vereinfacht sich Formel 47 zu:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1(z) p_2(y/z)}{z} dz . \quad (48)$$

### 3.4.2 Erwartungswert

Den Erwartungswert von  $Y$  kann man nach der Formel 39 bestimmen. Dazu setzt man als Funktion  $f(X_1, X_2) = X_1 X_2$  und erhält für den allgemeinen Fall abhängiger Zufallsgrößen:

$$E(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_X(x_1, x_2) dx_2 dx_1 . \quad (49)$$

Sind  $X_1$  und  $X_2$  stochastisch *unabhängig*, d. h. es gibt die Zerlegung  $p_X(x_1, x_2) = p_1(x_1) p_2(x_2)$ , dann kann man weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}
 E(X_1 X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_1(x_1) p_2(x_2) dx_2 dx_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_2(x_2) dx_2
 \end{aligned}$$

und erhält als Ergebnis:

$$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) . \quad (50)$$

Verschwindet der Erwartungswert des Produkts sogar überall ( $E(X_1 X_2) = 0$ ), dann werden die beiden Zufallsgrößen als orthogonal zueinander bezeichnet.

### 3.4.3 Varianz

In einer ganz allgemeinen Darstellung führt das Einsetzen von Gleichung 47 in die Formel 10 der Varianz zu:

$$\text{Var}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy - E^2(Y) .$$

Eine weitere Vereinfachung scheint hier ohne genaue Kenntnis von  $p(y)$  nicht möglich — allerdings kann man für stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen mit Hilfe von Formel 48 (und der Substitution  $w = y/u$ ) noch einen Schritt weiter gehen:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} y^2 \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{p_1(u) p_2(y/u)}{u} du dy - E^2(Y) \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{p_1(u)}{u} \int_{x=-\infty}^{\infty} y^2 p_2(y/u) dy du - E^2(Y) \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{p_1(u)}{u} \int_{w=-\infty}^{\infty} w^2 u^3 p_2(w) dw du - E^2(Y) \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} u^2 p_1(u) \int_{w=-\infty}^{\infty} w^2 p_2(w) dw du - E^2(X_1) E^2(X_2) \\ &= \int_{u=-\infty}^{\infty} u^2 p_1(u) [\text{Var}(X_2) + E^2(X_2)] du - E^2(X_1) E^2(X_2) \\ &= [\text{Var}(X_2) + E^2(X_2)] [\text{Var}(X_1) + E^2(X_1)] - E^2(X_1) E^2(X_2) . \end{aligned}$$

Nimmt man die Definition der Varianz nach Formel 11 hinzu, dann ist die folgende Darstellung gleichwertig:

$$\text{Var}(X_1 X_2) = E(X_1^2) E(X_2^2) - E^2(X_1) E^2(X_2) . \quad (51)$$

Für mittelwertfreie Zufallsgrößen ( $E(X) = 0$ ) geht es dann sogar noch etwas einfacher:

$$\text{Var}(X_1 X_2) = \text{Var}(X_1) \text{Var}(X_2) = E(X_1^2) E(X_2^2) .$$

### 3.4.4 Effektivwert

Ausgehend von Gleichung 12 kann der Effektivwert (bei stochastisch *unabhängigen* Zufallsgrößen) durch Einsetzen der Formeln 50 und 51 leicht ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^2 &= E(Y^2) \\ &= \text{Var}(Y) + E^2(Y) \\ &= E(X_1^2) E(X_2^2) - E^2(X_1) E^2(X_2) + E^2(X_1) E^2(X_2) \\ &= E(X_1^2) E(X_2^2) \\ &= \tilde{X}_1^2 \tilde{X}_2^2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist entsprechend wenig überraschend:

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \\ &\text{bzw.} \\ \tilde{Y} &= \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \tilde{X}_3 \cdots \tilde{X}_{n-1} \tilde{X}_n . \end{aligned}$$

## 4 Zufallsprozesse

### 4.1 Einführung

Das Modell des Zufallsprozesses geht davon aus, daß beliebig viele stochastische Vorgänge  $\mathbf{X}(t)$  in der Zeit gleichzeitig ablaufen. Für *stationäre* und *ergodische* Prozesse gilt einschränkend, daß die beschreibenden Prozeßparameter vom Betrachtungszeitpunkt  $t$  unabhängig sind (Stationarität) und eine ausgewählte Realisierung  $X(t)$  des Prozesses  $\mathbf{X}(t)$  zur Bestimmung seiner statistischen Parameter ausreicht (Ergodensatz von BIRKHOFF-CHINTCHIN [Gne58, § 57]). Dies bedeutet unter anderem, daß alle statistischen Kenngrößen (Momente, wie Erwartungswert, Varianz usw.

## 4 Zufallsprozesse

) des Ensembles zu einem Zeitpunkt  $t_0$  mit denselben Größen *einer* Realisierung  $X(t)$ , über die Zeit betrachtet, übereinstimmen müssen [EK91, Mil90, Kad68, Kre79].<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}(t_0)] &= E[X(t)] \\ \text{Var}[\mathbf{X}(t_0)] &= \text{Var}[X(t)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

### 4.2 Autokorrelationsfunktion

Nehmen wir nun an, wir betrachten eine Realisierung  $X(t)$  zu zwei Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_0 + \tau$ . Obwohl für stationäre Zufallsprozesse der Zeitpunkt  $t$  keine Rolle spielt, wird trotzdem (zumindest unter dem Blickwinkel der Allgemeinheit) eine stochastische Abhängigkeitsbeziehung zwischen  $X(t_0)$  und  $X(t_0 + \tau)$  bestehen. Bezeichnen wir nun zwei Zufallsvariablen mit  $X_1 = X(t_0)$  und  $X_2 = X(t_0 + \tau)$  und stellen die Frage nach einer der wesentlichsten Eigenschaften des Zufallsvektors  $(X_1, X_2)$  – nämlich der Abhängigkeit (bzw. Unabhängigkeit) von  $X_1$  und  $X_2$ . Dazu haben wir schon geeignete Maße kennengelernt, nämlich die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten. Um ausgehend von deren Definition jedoch fortfahren zu können, müssen wir noch Existenz und Kenntnis der verbundenen Wahrscheinlichkeitsdichte des zweidimensionalen Vektors  $p_X(X_1, X_2)$  voraussetzen. Nun definieren wir eine neue (aber dennoch mit  $\text{Corr}(\cdot)$  und  $\text{Cov}(\cdot)$  eng verwandte) Größe und bezeichnen sie als Korrelation  $r(X_1, X_2)$  zweier Zufallsgrößen.<sup>26</sup>

$$r(X_1, X_2) = E(X_1 X_2)$$

Gleichbedeutend ist auch der folgende Ausdruck, wenn man Formel 24 berücksichtigt.

$$r(X_1, X_2) = \text{Cov}(X_1, X_2) + E(X_1) E(X_2)$$

Erinnern wir uns an den Ausgangspunkt und ersetzen die (zur besseren Anschauung eingeführten) Zufallsgrößen  $X_1$  und  $X_2$  wieder durch die Realisierung  $X(t)$ .

$$r[X(t_0), X(t_0 + \tau)] = E[X(t_0)X(t_0 + \tau)]$$

---

<sup>25</sup>Man sagt auch, daß Scharmittelwerte und Zeitmittelwerte äquivalent sind.

<sup>26</sup>Die uns im Zusammenhang mit dem Erwartungswert des Produktes von Zufallsgrößen (Abschnitt 3.4) sowie der Kovarianz mittelwertfreier Zufallsgrößen (Abschnitt 2.3.3) schon begegnet ist.

Ferner berücksichtigen wir, daß für stationäre Zufallsprozesse der Zeitpunkt  $t_0$  keine Bedeutung hat – und definieren die sogenannte Autokorrelationsfunktion von  $X(t)$ .

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \stackrel{E(X)=0}{=} \text{Cov}[X(t), X(t+\tau)]$$

Für eine kontinuierliche Realisierung  $X(t)$  des Zufallsprozesses  $\mathbf{X}(t)$  berechnet sich dieser Erwartungswert wie folgt (vgl. Abschnitt 3.4):

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)p_X[x(t),x(t+\tau)] dx(t) dx(t+\tau).$$

Für ergodische Prozesse nimmt man nun zusätzlich noch an, daß der Erwartungswert  $E[X(t)X(t+\tau)]$  aus der Zeitfunktion  $x(t)$  als (Selbst-) Ähnlichkeitsmaß folgendermaßen bestimmt werden kann.

$$\varphi_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau) dt = \overline{x(t)x(t+\tau)} \quad (52)$$

Die dadurch definierte Autokorrelationsfunktion (AKF) hat folgende Eigenschaften:

1. Die AKF ist bezüglich  $\tau$  eine gerade Funktion, d. h.  $\varphi_{xx}(-\tau) = \varphi_{xx}(\tau)$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t-\tau) dt \\ &\stackrel{u:=t-\tau}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(u+\tau)x(u) du = \varphi_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

2. Für  $\tau \rightarrow 0$  ist sie gleich dem Quadrat des Effektivwertes (bzw. der mittleren Leistung  $P$  des Signals), vorausgesetzt  $X(t)$  ist keine aperiodische oder determinierte Funktion, sondern ein echter Zufallsprozeß.

$$\varphi_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = E[X^2(t)] = \tilde{X}^2 = P \quad (53)$$

In der Umgebung von  $\tau = 0$  ist insbesondere der Abfall von  $\varphi_{xx}(\tau)$  ein Maß für die Regellosigkeit des Prozesses.

Ist  $X(t)$  aber ein determiniertes Energiesignal (charakterisiert durch  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$ ), dann

#### 4 Zufallsprozesse

wird üblicherweise die Definition der AKF (sowie aller daraus abgeleiteten Größen) geringfügig modifiziert.<sup>27</sup>

$$\varphi_{xx}^{(E)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt \quad (54)$$

3. Für  $\tau \rightarrow \pm\infty$  kann man annehmen, daß  $x(t)$  und  $x(t+\tau)$  vollständig unabhängig sind, weshalb dann

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \int_T x(t) dt = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \right]^2 = \overline{x(t)}^2$$

gilt. Hat der Zufallsprozeß keine systematischen (oder determinierte) Anteile und außerdem einen zeitlichen Mittelwert  $\overline{x(t)} = 0$ , dann verschwindet die Autokorrelationsfunktion im Unendlichen:  $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{xx}(\tau) = 0$ .

4. Wegen Punkt 2 gilt immer die Relation  $|\varphi_{xx}(\tau)| \leq \varphi_{xx}(0)$ .<sup>28</sup>
5. Aus Eigenschaft 1 ergibt sich die Ausdrucksmöglichkeit der AKF als Faltung.

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)x[-(\tau-t)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x[-(\tau-t)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x(t) * x(-t)|_{t=\tau} \end{aligned}$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (x * x^*)(\tau) \quad (55)$$

Für (determinierte) Energiesignale entfällt der Limes, d. h. die ‘‘Energie-AKF’’ ist ganz einfach die Faltung

$$\varphi_{xx}^{(E)}(\tau) = (x * x^*)(\tau).$$

<sup>27</sup>Ansonsten würde wegen der Division durch  $T$  im Limes immer  $\varphi_{xx}(\tau) \rightarrow 0$  gehen.

<sup>28</sup>Hintergrund ist die CAUCHY-SCHWARZ’sche Ungleichung in der Form  $|\int f(x)g(x) dx|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$ .



### 4.3 Kreuzkorrelationsfunktion

Mit ähnlichem Hintergrund wie bei der Autokorrelationsfunktion kann man auch den Zusammenhang zwischen *zwei* Zufallsprozessen  $\mathbf{X}(t)$  und  $\mathbf{Y}(t)$  durch ein Ähnlichkeitsmaß erklären, welches Kreuzkorrelationsfunktion  $\varphi_{xy}(\tau)$  genannt wird.

$$\varphi_{xy}(\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t+\tau) dt \quad (56)$$

Verschwimmt die Kreuzkorrelationsfunktion für jedes  $\tau$ , dann besteht keine Korrelation zwischen den Zufallsprozessen  $\mathbf{X}(t)$  und  $\mathbf{Y}(t)$ . Liegt jedoch Korrelation vor, dann gibt es typischerweise ein  $\tau$ , für daß die Kreuzkorrelationsfunktion maximal wird.

Für Energiesignale existiert wieder eine abgewandelte Form (ohne Limes) von Gleichung 56, die auch als Faltung dargestellt werden kann.

$$\varphi_{xy}^{(E)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau) dt = (x * y^*)(\tau)$$

### 4.4 Spektrale Leistungsdichte

Machen wir nun einen weiteren Schritt von den Zufallsprozessen zu Zufallssignalen, der aber eher eine Notationsfrage als etwas Grundsätzliches ist.<sup>29</sup> Dabei stellen wir die Frage nach der spektralen Leistungsdichte eines stationären, ergodischen Zufallsprozesses, also nach infinitesimalen Leistungsanteilen in einem Frequenzbereich  $df$  (bzw.  $d\omega$ ), der einem Zufallssignal  $x(t)$  zugeordnet ist. Von Gleichung 53 wissen wir, daß für die Gesamtleistung  $P$  von  $x(t)$  die Formel

$$P = \varphi_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt$$

gilt. Aus dem Gebiet der Harmonischen Analyse ist außerdem bekannt, daß die spektrale "Leistungsamplitude" an der (Kreis-) Frequenz  $\omega$  durch  $|X(j\omega)|^2 = |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2$  gekennzeichnet ist. Die FOURIER-Transformation als uneigentliches Integral

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

muß für die Existenz von  $X(\omega)$  aber konvergieren, was man bei Zufallsprozessen wegen  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dx(t) \Rightarrow \infty$  normalerweise nicht gewährleisten kann. Trotzdem kann man für diesen Fall (mitunter durch

<sup>29</sup>FOURIER-Transformierte werden, wie Zufallsgrößen auch, mit Großbuchstaben bezeichnet.

#### 4 Zufallsprozesse

Einsatz der DIRAC-Funktion) eine Größe entwickeln, die spektrale Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega)$  des Zufallsprozesses  $\mathbf{X}(t)$  genannt wird. Dazu bilden wir die FOURIER-Transformierte der Autokorrelationsfunktion

$$\mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

und ersetzen mit Hilfe von Formel 52 formal  $\varphi_{xx}(\tau)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau \end{aligned}$$

Nun wird die Integrationsreihenfolge vertauscht und danach  $u = t + \tau$  substituiert.<sup>30</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \int_{-T/2}^{T/2} x(u) e^{-j\omega(u-t)} du dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega(-t)} \int_{-T/2}^{T/2} x(u) e^{-j\omega u} du dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(u) e^{-j\omega u} du \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X(-j\omega)X(j\omega) \end{aligned}$$

Auch wenn das FOURIER-Integral  $X(j\omega)$  selbst nicht konvergiert, so ist doch  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} |X(j\omega)|^2$  bzw.  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int x^2(t) dt$  endlich.<sup>31</sup>

$$\mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(j\omega)|^2 = S_{xx}(\omega) \quad (57)$$

<sup>30</sup>Wobei die Integrationsgrenzen  $\pm T$  nur deshalb erhalten bleiben, weil der  $\lim_{T \rightarrow \infty}$  vor dem Integral steht und deshalb  $t$  bei der Substitution der Grenzen unbedeutend wird.

<sup>31</sup>Man kann sich auch vorstellen, daß  $|X(j\omega)|^2$  nur das Doppelintegral  $\iint x(t)x(t+\tau) e^{-j\omega\tau} dt d\tau$  über  $T$  repräsentiert.

Man nennt den so gewonnenen Ausdruck die spektrale Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega)$  des Zufallsprozesses bzw. das WIENER-CHINTCHIN-Theorem [Kan73, 7.2], [Sch90, 7.3]. Interessant ist auch, daß sich diese Gleichung (57) ganz einfach ergibt, wenn man den Faltungssatz<sup>32</sup> der Fourier-Transformation auf die Form der Autokorrelationsfunktion von Formel 55 anwendet.

$$\mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x(t) * x(-t)|_{t=\tau}\right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}\{x(t) * x(-t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X(-j\omega)X(j\omega)$$

Die Grundaussage des Satzes von WIENER und CHINTCHIN, nämlich das die spektrale Leistungsdichte mit der Autokorrelationsfunktion über die FOURIER-Transformation verbunden ist, rechtfertigt natürlich auch die Umkehrformel:

$$\mathcal{F}^{(-1)}\{S_{xx}(\omega)\} = \varphi_{xx}(\tau)$$

bzw. symbolische Darstellung der FOURIER-Transformation.

$$\varphi_{xx}(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_{xx}(\omega)$$

Die spektrale Leistungsdichte eines Zufallsprozesses hat einige interessante Eigenschaften:

1. Da (schon) die Autokorrelationsfunktion eine gerade Funktion ist, muß die spektrale Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega)$  reellwertig und positiv sein.<sup>33</sup>
2. Die mittlere Leistung  $P$  des stochastischen Prozesses kann durch Integration über die gesamte spektrale Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega)$  gewonnen werden.

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

Für diesen Nachweis geht man am Besten von der bekannten Beziehung  $P = \varphi_{xx}(0)$  aus.

$$P = \varphi_{xx}(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{F}^{(-1)}\{S_{xx}(\omega)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

---

<sup>32</sup> $(f * g)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega)G(j\omega)$

<sup>33</sup>Insbesondere gehen alle Phaseninformationen, die in  $X(j\omega)$  noch enthalten sind, "verloren".

#### 4 Zufallsprozesse

3. Nach Punkt 2 kann man  $S_{xx}(\omega)$  auch wirklich als Leistungsdichte auffassen, wenn man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hinzuzieht.<sup>34</sup>

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{S_{xx}(\omega)}{2\pi} = S_{xx}(f)$$

#### Weißes Rauschen

Weißes Rauschen hat sowohl für die Theorie als auch in praktischen Anwendungen eine große Bedeutung. Diese liegt vor allem in der gleichmäßigen spektralen Verteilung, die sich über das gesamte (theoretische) Frequenzband mit konstanter Leistungsdichte (die mit  $S_0$  bezeichnet sein soll) zieht.<sup>35</sup>

$$S_{xx}(\omega) = S_0$$

FOURIER-Rücktransformation der spektralen Leistungsdichte ergibt nach dem WIENER-CHINTCHIN-Theorem die Autokorrelationsfunktion und bei Umkehrung wieder die spektrale Leistungsdichte.

$$S_{xx}(\omega) = S_0 \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi_{xx}(\tau) = S_0 \delta(\tau)$$

#### 4.5 Spektrale Energiedichte

Bei Anwendung der modifizierten Formel 54 für die Autokorrelationsfunktion von Energiesignalen entfällt der Limes in Gleichung 57 und man erhält für die spektrale Energiedichte:

$$S_{xx}^{(E)}(\omega) = |X(j\omega)|^2 = \mathcal{F} \{ \varphi_{xx}^{(E)}(\tau) \} .$$

Wenn nach dem PARSEVAL'schen Theorem für die Gesamt-Signalenergie  $E$  gilt:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}^{(E)}(\omega) d\omega,$$

dann bestätigt uns das Differential

---

<sup>34</sup>  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x)$

<sup>35</sup> Deshalb auch *weißes* Rauschen – wie weißes Licht, also Licht in dem alle Frequenzen gleichermaßen enthalten sind.

$$\frac{dE}{d\omega} = S_{xx}^{(E)}(\omega)$$

in der Korrektheit des Begriffs einer Energiedichte.

## 4.6 Kreuzleistungs- und Energiedichten

Eine Verallgemeinerung zur spektralen Leistungsdichte (eines Zufallssignals) stellt die Kreuzleistungsdichte  $S_{xy}(j\omega)$  dar. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen zwei Zufallssignalen  $x(t)$  und  $y(t)$  im Frequenzbereich und ist als

$$S_{xy}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X(j\omega) Y^*(j\omega)$$

definiert. Im Gegensatz zur spektralen "Auto"-Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega)$  ist sie eine komplexe Größe.

Was den Zusammenhang mit den zeitlichen Zufallsprozessen angeht, ist auch sie eine FOURIER-Transformierte,<sup>36</sup> nämlich der Kreuzkorrelationsfunktion von  $x(t)$  und  $y(t)$  (vgl. Formel 56).

$$S_{xy}(j\omega) = \mathcal{F} \{ \varphi_{xy}(\tau) \}$$

Für Energiesignale ( $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$ ) ist die Kreuzenergiedichte, in ähnlicher Art und Weise wie auch schon die Kreuzkorrelationsfunktion, in einer modifizierten Form definiert.

$$S_{xy}^{(E)}(j\omega) = X(j\omega) Y^*(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi_{xy}^{(E)}(\tau)$$

## 5 Spezielle Anwendungen

### 5.1 LTI-Systeme

Bei den aus der Systemtheorie her bekannten linearen zeitinvarianten (LTI) Systemen (der Art von Abbildung 1) kann man die Frage stellen, wie ein Zufallsprozeß  $\mathbf{X}(t)$  am Eingang auf  $\mathbf{Y}(t)$  am Ausgang übertragen wird. Aus Sicht des Ein- und Ausgangssignals  $X(j\omega)$  bzw.  $Y(j\omega)$  im Bildbereich wissen wir, daß ein solches System durch die Gleichung

<sup>36</sup>WIENER-CHINTCHIN-Theorem für die Kreuzkorrelation.

## 5 Spezielle Anwendungen

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

beschrieben werden kann. Dabei ist  $H(j\omega)$  die komplexe Übertragungsfunktion des Systems im Bildbereich der FOURIER-Transformation. Sicherlich rechtfertigt diese Beziehung auch den durch einfache Variablensubstitution entstehenden Ausdruck  $Y(-j\omega) = H(-j\omega)X(-j\omega)$  oder äquivalent  $Y^*(j\omega) = H^*(j\omega)X^*(j\omega)$ . Multipliziert man jetzt die Gleichungen für  $Y(j\omega)$  und  $Y^*(j\omega)$  miteinander, dann erhält man den quadratischen Amplitudengang des Systems.

$$\begin{aligned} Y(j\omega)Y^*(j\omega) &= H(j\omega)H^*(j\omega)X(j\omega)X^*(j\omega) \\ |Y(j\omega)|^2 &= |H(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man außerdem, daß

- für stabile Systeme das FOURIER-Integral  $H(j\omega)$  existiert;
- für Leistungssignale die Fourier-Transformierten  $X(j\omega)$  und  $Y(j\omega)$  nicht konvergieren;
- die FOURIER-Transformierten der Autokorrelationsfunktionen  $\varphi_{xx}(\tau)$  und  $\varphi_{yy}(\tau)$  die spektralen Leistungsdichten  $S_{xx}(\omega)$  und  $S_{yy}(\omega)$  sind;

und bildet sowohl links- als auch rechtsseitig mit  $\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T$  den Grenzwert,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |Y(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(j\omega)|^2$$

so erhält man auf der Grundlage des WIENER-CHINTCHIN-Theorems (Gleichung 57) die Beziehung zwischen den spektralen Leistungsdichten der Ein- und Ausgangsprozesse im Frequenzbereich.

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (58)$$

Im Zeitbereich ergibt sich daraus bei Anwendung des Faltungssatzes der FOURIER-Transformation

$$\mathcal{F}^{(-1)}\{S_{yy}(\omega)\} = \mathcal{F}^{(-1)}\{|H(j\omega)|^2\} * \mathcal{F}^{(-1)}\{S_{xx}(\omega)\}$$

und so für die (zeitinvarianten) Autokorrelationsfunktionen:

$$\varphi_{yy}(\tau) = \mathcal{F}^{(-1)}\{|H(j\omega)|^2\} * \varphi_{xx}(\tau). \quad (59)$$

Bedenkt man noch, daß die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems gleichzeitig die Fourier-Transformierte der Impulsantwort  $h(t)$  ist,

$$H(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} h(t) \quad H^*(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} h^*(t) = h(-t)$$

und immer die Beziehung  $|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega)$  gilt, so kann man (wieder mit dem Faltungssatz der FOURIER-Transformation) Gleichung 59 als zweifache Faltung darstellen.

$$\varphi_{yy}(\tau) = (h * h^* * \varphi_{xx})(\tau) \quad (60)$$

Faßt man der Übersichtlichkeit halber noch  $(h * h^*)(\tau)$  als Energie-AKF  $\varphi_H^{(E)}(\tau)$  eines stabilen LTI-Systems nach Gleichung 54 zusammen,

$$\varphi_H^{(E)}(\tau) = (h * h^*)(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} S_H^{(E)}(\omega) = |H(j\omega)|^2 \quad (61)$$

so erhält man die WIENER-LEE-Beziehung in ihrer geläufigen Form.

$$\varphi_{yy}(\tau) = (\varphi_H^{(E)} * \varphi_{xx})(\tau) \quad (62)$$

Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  Signale mit endlicher Energie, dann muß man (wie gewohnt) nur die Division durch  $\lim_{T \rightarrow \infty} T$  überall weglassen, was z. B. aus Formel 58

$$S_{yy}^{(E)}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}^{(E)}(\omega)$$

macht.

## 5.2 Optimalfilter

Optimalfilter sind (LTI-) Systeme, die eine (angepaßte) Übertragungsfunktion derart besitzen, daß ein additiv gestörtes Nutzsignal möglichst sicher zu detektieren ist. Nach dem Modell in Abbildung 3 benennen wir mit  $x(t)$  das determinierte Signal (der Gesamtenergie  $E$ ) und mit  $n(t)$  weißes Rauschen der spektralen Leistungsdichte  $S_{xx}(\omega) = S_0$ , welches auf dem Übertragungskanal induziert wird.

## 5 Spezielle Anwendungen

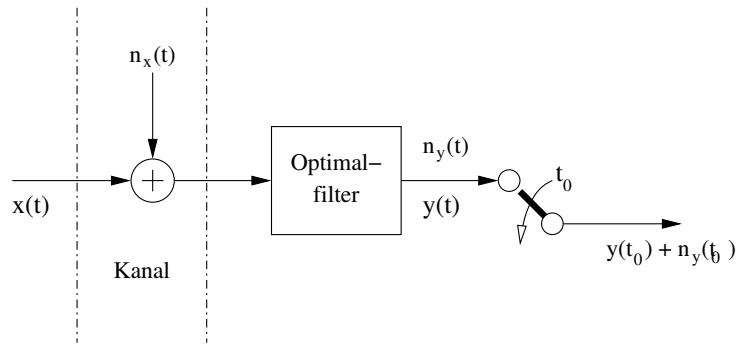


Abbildung 3: Übertragungskanal mit Optimalfilter

Das Optimierungsproblem besteht nun darin, zum Abtastzeitpunkt  $t_0$  das Verhältnis von Momentan-Nutzleistung  $y^2(t_0)$  zur Rauschleistung am Ausgang zu maximieren. Dabei ist (nach Formel 53, Abschnitt 4.2) die Störleistung genau die Autokorrelationsfunktion  $\varphi_{yy}(0)$ .

$$\frac{y^2(t_0)}{\varphi_{yy}(0)} \Rightarrow \text{Max.}$$

Zuerst drücken wir  $y(t_0)$  durch die (für LTI-Systeme<sup>37</sup> typische) Faltung von  $x(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_{opt}(j\omega)$  aus.

$$y^2(t_0) = \left[ (h * x)|_{t=t_0} \right]^2 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t_0 - t) dt \right]^2$$

Die Rauschleistung kann z. B. ermittelt werden, indem man ausgehend von Formel 60 ff.  $\varphi_{yy}(\tau)$  bestimmt. Führt man die gesamte Berechnung im Zeitbereich durch, dann ist in Verbindung mit der Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens  $\varphi_{xx}(\tau) = S_0 \delta(\tau)$  das Ausblendtheorem der DIRAC-Funktion  $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t_0)$  hilfreich einzusetzen.

$$\varphi_{yy}(\tau) = (h * h^* * \varphi_{xx})(\tau) = S_0 h(\tau) * h(-\tau)|_{\tau=0} = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

Bringen wir nun beide Zwischenergebnisse zusammen

$$\frac{y^2(t_0)}{\varphi_{yy}(0)} = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t_0 - t) dt \right]^2}{S_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt}$$

<sup>37</sup>Bei LTI-Systemen kann man vom Superpositionsprinzip von Nutz- und Störsignal ausgehen, d. h. wir können beide Anteile an jeder Stelle des Modells separat betrachten.



und erweitern den Bruch noch um  $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ , welches mit der Substitution  $t := t_0 - t$  in  $E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t_0 - t) dt$  übergeht.

$$\frac{y^2(t_0)}{\varphi_{yy}(0)} = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t_0 - t) dt \right]^2}{S_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \cdot \frac{E}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t_0 - t) dt}$$

Etwas umsortiert (und gesichtet) ist festzustellen, daß hier der Korrelationskoeffizient nach Formel 29 in der zeitlichen Form für Energiesignale

$$\text{Corr}[x_1(t), x_2(t)] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t) dt}} \quad (63)$$

zwischen  $h(t)$  und  $x(t_0 - t)$  enthalten ist.

$$\frac{y^2(t_0)}{\varphi_{yy}(0)} = \frac{E}{S_0} \cdot \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t_0 - u) du \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt} \cdot \frac{E}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t_0 - t) dt} = \frac{E}{S_0} \text{Corr}^2[h(t), x(t_0 - t)]$$

Wie wir aus Abschnitt 2.3.5 wissen, ist der Korrelationskoeffizient dann am größten, wenn beide Funktionen linear abhängig sind, also  $h(t) = k x(t_0 - t)$  gilt. Durch FOURIER-Transformation dieser Beziehung gelangt man zur Übertragungsfunktion des Optimalfilters im Bildbereich.

$$H_{opt} = k X^* e^{-j\omega t_0} \xrightarrow{\mathcal{F}} k x(t_0 - t)$$

Für das Nutzsinal ergeben sich folgerichtig die Beziehungen:<sup>38</sup>

$$y(t) = x(t) * h(t) = k x(t) * x(t_0 - t)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) = k X(j\omega) X^* e^{-j\omega t_0} = k |X(j\omega)|^2 e^{-j\omega t_0} .$$

Die Leistungsbilanz zum Zeitpunkt  $t_0$  fällt mit  $\text{Corr}(\cdot) = 1$  folgendermaßen aus:

$$\frac{y^2(t_0)}{\varphi_{yy}(0)} = \frac{E}{S_0} .$$

<sup>38</sup>Das Nutzsinal  $y(t)$  stellt im Sinne von Formel 55 die um  $t_0$  verschobene Energie-AKF von  $x(t)$  dar.

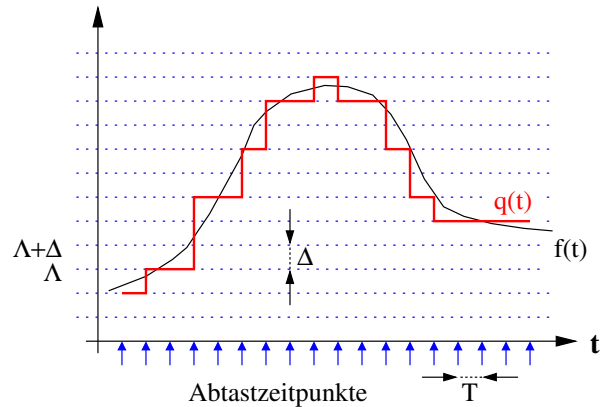


Abbildung 4: Lineare Quantisierung

## 5.3 Quantisierung

### 5.3.1 Quantisierungsrauschen

Die Wandlung eines zeitkontinuierlichen Eingangssignals  $f(t)$  in ein digitalisiertes Ausgangssignal  $q(kT)$  ist ein Vorgang, der üblicherweise aus den Schritten: Abtasten und Quantisierung besteht [Azi90, 3.7], [EK91, 1.7.4]. Die Quantisierung in diskrete Amplitudenwerte erfolgt fast immer durch Einsatz eines Analog/Digital-Wandlers (A/D-Konverter, ADC). Aufgrund der endlichen Anzahl an Quantisierungsstufen entsteht dabei ein Fehler, der sich als Quantisierungsrauschen  $n(t)$  repräsentiert (vgl. Abbildung 4).

Für stationäre ergodische Prozesse ist die Betrachtung von  $q(t)$  zu einem beliebigen Abtastzeitpunkt  $kT$  ausreichend.<sup>39</sup> Wenn  $\Delta$  die Höhe einer Quantisierungsstufe darstellt,<sup>40</sup> dann wird der Signalwert  $f(kT)$  mit  $\Lambda \leq f(kT) \leq \Lambda + \Delta$  bei idealer Quantisierung entweder auf den Wert  $\Lambda$  oder aber  $\Lambda + \Delta$  – und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit – quantisiert. Dadurch ist der Fehler  $n$  im Intervall  $-\Delta/2 \leq n \leq \Delta/2$  gleichverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(n) = \Delta^{-1}$  (vgl. Formel 14). Der Effektivwert des Quantisierungsrauschens kann nun ausgehend von Gleichung 12, mit Hilfe der für die Gleichverteilung gültigen Formeln 15 und 16, gewonnen werden. Beim Einsetzen der konkreten Werte für die Intervallgrenzen ( $a = -\Delta/2$ ,  $b = +\Delta/2$ ) fällt sofort auf, daß der Mittelwert verschwindet und sich die Effektivwertformel 12 weiter vereinfacht.

<sup>39</sup>Statt  $n(t) = f(t) - q(t)$  bzw.  $n(kT)$  wird deshalb im Weiteren nur noch  $n$  geschrieben.

<sup>40</sup>Wir betrachten hier nur linearer Quantisierung, d. h. alle Quantisierungsstufen sind äquidistant.

$$\begin{aligned}\tilde{n}^2 &= \text{Var}(n) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\Delta^2}{12} \\ \tilde{n} &= \frac{\Delta}{\sqrt{12}} \approx \frac{\Delta}{3,46}\end{aligned}\quad (64)$$

In der Theorie ist der auf den Eingang des A/D-Wandlers bezogene Effektivwert des Quantisierungsrauschens aus den zugehörigen technischen Daten ermittelbar. Dazu bestimmt man aus der Anzahl von Bit  $B$  (die typischerweise den A/D-Wandler<sup>41</sup> charakterisieren) und der maximal erlaubten Größe des Eingangssignals (üblicherweise die Referenzspannung  $U_0$ ) die Anzahl der Quantisierungsstufen zu  $N = 2^B$ . Bei linearer Quantisierung ergibt sich als Effektivwert für das dadurch hervorgerufene Rauschen

$$\tilde{n} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{U_0}{N \sqrt{12}} = 2^{-B} \frac{U_0}{\sqrt{12}}. \quad (65)$$

### 5.3.2 Signal-Rausch-Abstand (Signal-Noise-Ratio, SNR)

Die SNR ist als logarithmisches Verhältnis von Signalleistung zur Rauschleistung definiert.

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{P_s}{P_n}$$

Wird die Leistung jeweils am gleichen Widerstand umgesetzt kann die SNR mittels der Effektivwerte des Bezugssignals  $\tilde{s}$  und des Quantisierungsrauschens  $\tilde{n}$  ausgedrückt werden.

$$\text{SNR} = 10 \log \left( \frac{\tilde{s}}{\tilde{n}} \right)^2 = 20 \log \frac{\tilde{s}}{\tilde{n}}$$

Bei einem sinusförmigen Nutzsignal  $\tilde{s}$  maximaler Aussteuerung ist als größter Spitzenwert  $U_0 = \sqrt{2} \tilde{s}$  anzusetzen.<sup>42</sup> Durch Anwendung der Gleichung 65 für die effektive Rauschamplitude kann der maximal erreichbare Signal-Rausch-Abstand bestimmt werden.

<sup>41</sup>Wobei in  $B$  das Vorzeichen-Bit nicht enthalten sein soll.

<sup>42</sup>Der durch den A/D-Wandler verzerrungsfrei, d. h. linear verarbeitet werden kann.

## 5 Spezielle Anwendungen

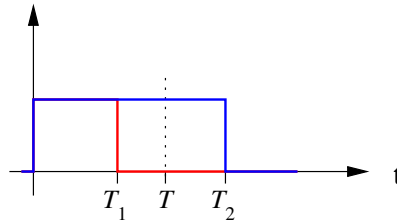


Abbildung 5: Pulsbreitendiskriminierung

$$\begin{aligned}
 \text{SNR} &= 20 \log \left( \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2^B \sqrt{12}}{U_0} \right) \\
 \text{SNR} &= 10 \log 6 + B \cdot 20 \log 2 \\
 \text{SNR} &\approx 7,78 \text{dB} + B \cdot 6,02 \text{dB}
 \end{aligned} \tag{66}$$

Wesentlich ist die Erkenntnis, daß bei einer Erhöhung der Auflösung des A/D-Wandlers um ein Bit der Signal-Rausch-Abstand linear um 6,02dB zunimmt.<sup>43</sup>

### 5.4 Pulsbreitendiskriminierung

Oft besteht die Forderung zwischen zwei Impulsen verschiedener Breite  $T_1$  und  $T_2$  zu unterscheiden. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, auf den Impulsanfang zu triggern und zu einem günstig gewählten Zeitpunkt  $T$  das Signal erneut abzutasten (vgl. Abbildung 5). Wird kein gültiger Pegel mehr erkannt, gilt der Impuls als beendet, was mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit darauf hindeutet, daß der Impuls mit der Breite  $T_1$  empfangen wurde. Die Wahrscheinlichkeit, daß es sich um den Impuls der Breite  $T_2$  handelt, ist dann das komplementäre Ereignis.

Geht man davon aus, daß die Impulsbreiten normalverteilt sind,<sup>44</sup> wobei  $\sigma_i$  die Streuung und  $\mu_i$  der Erwartungswert des jeweiligen Impulses sind, dann gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichten

$$p_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right], \quad i = 1, 2.$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion (vgl. Definitionsgleichung 6), also die Wahrscheinlichkeit, daß der jeweilige Impuls (also  $T_i$ ) kürzer als der Wert  $t$  ist, ist dann

<sup>43</sup>Selbst wenn man andere Signalformen zugrunde legt, ändert sich dieser Fakt nicht.

<sup>44</sup>Zentraler Grenzwertsatz für Summen von unabhängigen Zufallsvariablen [Kör88, 70].

$$\Pr(T_i < t) = F_i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right] du.$$

Substituiert man  $z = (u - \mu_i)/\sigma_i$  mit  $du = \sigma_i dz$ , dann kann mit der (auch tabelliert vorliegenden) Standard-Normalverteilung  $\Phi(z)$  gearbeitet werden.<sup>45</sup>

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \int_{-\infty}^{(t-\mu_i)/\sigma_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi\left(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i}\right) \\ \Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \end{aligned} \quad (67)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Impuls mit der Länge  $T_1$  kürzer als  $T$  ist, entspricht genau der Wahrscheinlichkeit diesen Impuls erkannt zu haben.

$$\Pr(T_1 < T) = \Phi\left(\frac{T - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

Entsprechend gilt für die Wahrscheinlichkeit den Impuls mit der Breite  $T_2$  erkannt zu haben.

$$\Pr(T_2 > T) = 1 - \Pr(T_2 < T) = 1 - \Phi\left(\frac{T - \mu_2}{\sigma_2}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_2 - T}{\sigma_2}\right)$$

Gesucht wird nun der optimale Abtastzeitpunkt  $T$ , bei dem beide Wahrscheinlichkeiten gleich werden.

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 < T) &= \Pr(T_2 > T) \\ \Phi\left(\frac{T - \mu_1}{\sigma_1}\right) &= \Phi\left(\frac{T - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ \frac{T - \mu_1}{\sigma_1} &= \frac{\mu_2 - T}{\sigma_2} \end{aligned}$$

Bei gleicher Streuung  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$  für die Pulsbreiten  $T_i$  ist der optimale Abtastzeitpunkt  $T$  das arithmetische Mittel.

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

<sup>45</sup>Mittelwertfreie Normalverteilung mit  $\sigma = 1$ .

## Literatur

Die Wahrscheinlichkeit, einen der Impulse dabei falsch zu erkennen, liegt bei:<sup>46</sup>

$$\Pr(T_1 > T) = 1 - \Pr(T_1 < T) = 1 - \Phi\left(\frac{T - \mu_1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2\sigma}\right).$$

Geht man dagegen vom gleichen relativen Fehler  $\varepsilon$  für beide Pulsbreiten aus, so ergibt sich mit

$$\frac{\mu_1}{\sigma_1} = \frac{\mu_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

der optimale Wert zu

$$\begin{aligned}\frac{T - \mu_1}{\varepsilon\mu_1} &= \frac{\mu_2 - T}{\varepsilon\mu_2} \\ \frac{T}{\mu_1} - 1 &= 1 - \frac{T}{\mu_2} \\ T &= 2 \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.\end{aligned}$$

Der günstigste Abtastzeitpunkt liegt also beim Quotienten aus quadratisch geometrischem und einfachem arithmetischem Mittelwert der beiden Pulsbreiten. Bei dieser Wahl ist die Wahrscheinlichkeit einen der Impulse falsch zu erkennen

$$\Pr(T_1 > T) = 1 - \Pr(T_1 < T) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\right).$$

## Literatur

- [Azi90] AZIZI, SEYED ALI: *Entwurf und Realisierung digitaler Filter*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 5. Auflage, 1990.
- [EK91] EMBREE, PAUL M. und BRUCE KIMBLE: *C Language Algorithms for Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [Gne58] GNEDENKO, B. W.: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Band IX der Reihe *Mathematische Lehrbücher*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1958.
- [Kad68] KADEN, HEINRICH: *Theoretische Grundlagen der Datenübertragung*. R. Oldenbourg, München, 1968.

---

<sup>46</sup>Unter Berücksichtigung der Beziehung  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ .

- [Kan73] KANASEWICH, E.R.: *Time Sequence Analysis in Geophysics*. The University of Alberta Press, Edmonton, Alberta, Canada, 1973.
- [Kör88] KÖRNER, T.W.: *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [Kre79] KRESS, DIETER: *Theoretische Grundlagen der Übertragung digitaler Signale*. Akademie-Verlag, Berlin, 1979.
- [Mil90] MILDENBERGER, OTTO: *Informationstheorie und Codierung*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1990.
- [PP02] PAPOULIS, ATHANASIOS und S. UNNIKRIISHNA PILLAI: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 4. Auflage, 2002.
- [Ros04] ROSS, SHELDON M.: *Introduction to Probability Models*. Elsevier Academic Press, 8. Auflage, 2004.
- [Sch90] SCHRÜFER, E.: *Signalverarbeitung – Numerische Verarbeitung digitaler Signale*. Carl Hanser Verlag, München Wien, 1990.
- [Spä73] SPĂTARU, ALEXANDRU: *Theorie der Informationsübertragung*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1973.

## Index

### A

Ausblendtheorem, 40  
Autokorrelationsfunktion, 31

### B

BIRKHOFF-CHINTCHIN-Theorem, 29

### C

CAUCHY-SCHWARZ'sche Ungleichung, 32

### D

Dichtefunktion, 6  
DIRAC-Funktion, 34, 40

### E

Effektivwert, 8, 24, 29  
Energiedichte, 36  
Energiesignale, 31, 39, 41  
Ergodensatz, 29  
Erwartungswert, 5, 7, 12, 22, 27

### F

Faltung, 22, 32, 33, 39, 40  
Faltungssatz, 35  
Funktionaldeterminante, 19

### G

GAUSS-Verteilung, 25  
Gleichverteilung, 8, 18, 42  
Glockenkurve, 25

### J

JACOBI-Determinante, 19

### K

Korrelation, 13, 30  
Korrelationskoeffizient, 15, 41  
Kovarianz, 12, 14  
Kreuzenergiedichte, 37  
Kreuzkorrelationsfunktion, 33, 37

### L

Leistungsdichte  
    Kreuz-, 37  
    Spektrale, 33  
LTI-Systeme, 37, 39

### M

Matched Filter, 39

### N

Normalverteilung, 25, 44

### O

Optimalfilter, 39

### P

Produkt von Zufallsgrößen, 26–29  
Pulsbreitendiskriminierung, 44

### Q

Quantisierung, 42  
    Fehler, 42  
    Rauschen, 42  
Quantisierungsrauschen, 42, 43



**R**

- Randdichte, 10, 23
- Randverteilung, 10, 12
- Rauschen
  - Weißes, 36, 39

**S**

- Signal-Rausch-Abstand (SNR), 43
- Standardabweichung, 5
- Stationarität, 29
- Streuung, 5
- Summe von Zufallsgrößen, 21–25

**V**

- Varianz, 5, 7, 14, 23, 28
- Verteilungsfunktion, 6, 9

**W**

- Wahrscheinlichkeit, 4, 6
  - bedingte, 11
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 6
  - einer Summe, 21
  - eines Produkts, 26
- WIENER-CHINTCHIN-Theorem, 35
- WIENER-LEE-Beziehung, 39

**Z**

- Zufallsgrößen
  - diskrete, 4–5
  - kontinuierliche, 5–9
  - mehrdimensionale, 9–15
  - mittelwertfreie, 5, 29
  - orthogonale, 28
  - Produkt von, 26–29
  - Summe von, 21–25
- Zufallsprozesse, 29–37