Grundlagen für Ingenieure

TSCHEBYSCHEFF-Funktionen

Revision : 256

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

T_n TSCHEBYSCHEFF-Funktion erster Art der Ordnung n

1 Einleitung

Dieser Typ von Funktionen wurde insbesondere durch P. L. TSCHEBYSCHEFF im Zusammenhang mit Approximationsproblemen untersucht [Tsc07, Ach67, Mei64, Kör88]. Eine verständliche Einführung in diese Funktionen[1] enthalten z. B. [HH92, Kai80] sowie [SS88], übersichtliche Zusammenfassungen der Beziehungen untereinander bzw. zu anderen speziellen Funktionen enthält [AS72], numerische Aspekte werden in [PTVF92] behandelt.

2 TSCHEBYSCHEFF-Funktionen erster Art

2.1 Definition

2.1.1 Analytische Darstellung

Die TSCHEBYSCHEFF'sche Funktion erster Art $\mathrm{T}_n(x)$ ist definiert als

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos x) \ . \tag{1}$$

Wegen $\cos(\mathrm{j}\varphi) = \cosh\varphi$ geht T_n für $|x| > 1$ in

$$\mathrm{T}_n(x) = \cosh(n \operatorname{arcosh} x)$$

über.

2.1.2 Parameterdarstellung

Nimmt man die Substitutionen

$$\mathrm{T}_n(x) = \cos(n\varphi), \qquad x = \cos\varphi, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \le 1 \tag{2}$$

in Ausgangsgleichung 1 vor, dann erhält man für $\mathrm{T}_n(x)$ eine Parameterdarstellung durch transzendente Funktionen. Wenn φ von $-\pi/2$ nach $+\pi/2$ läuft, dann bewegt sich x von -1 nach $+1$ und y alterniert im gleichen Intervall. Andere Werte für x, die außerhalb des Intervalls $[-1, +1]$ liegen, erhält man, wenn der Parameter φ imaginär wird. Für diesen Fall gilt[2]

$$\mathrm{T}_n(x) = \cosh(n|\varphi|), \qquad x = \cosh|\varphi|, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad |x| > 1 \tag{3}$$

[1] Meist sehr stark konzentriert auf die TSCHEBYSCHEFF-Funktionen erster Art.

[2] Denn für imaginäres Argument geht der Cosinus ja bekanntlich in die entsprechende Hyperbelfunktion über, d. h. $\cos(\mathrm{j}\,|\varphi|) = \cosh|\varphi|$.

2.1.3 Rekursive (algebraische) Darstellung

Die TSCHEBYSCHEFF'schen Funktionen haben eine ganz bemerkenswerte Eigenschaft – sie sind (rekursiv) als algebraische Polynome in x darstellbar[3].

$$\mathrm{T}_n(x) = 2x\,\mathrm{T}_{n-1}(x) - \mathrm{T}_{n-2}(x) \tag{4}$$

Die Rekursionsformel kann ausgehend von der Ordnung $n-1$ und unter Zuhilfenahme des Additionstheoremes $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(x) &= \cos\left[(n+1)\varphi\right] \\
&= \cos(n\varphi + \varphi) \\
&= \cos(n\varphi)\cos\varphi - \sin(n\varphi)\sin\varphi \\
&= x\,\mathrm{T}_n(x) - \sin(n\varphi)\sin\varphi
\end{aligned}$$

Mit der trigonometrischen Multiplikationsformel $\sin\alpha\sin\beta = \left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]/2$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+1}(x) &= x\,\mathrm{T}_n(x) - \sin(n\varphi)\sin\varphi \\
2\,\mathrm{T}_{n+1}(x) &= 2x\,\mathrm{T}_n(x) - \cos\left[(n-1)\varphi\right] + \cos\left[(n+1)\varphi\right] \\
2\,\mathrm{T}_{n+1}(x) &= 2x\,\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x) + \mathrm{T}_{n+1}(x) \\
\mathrm{T}_{n+1}(x) &= 2x\,\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

was nach Umindizierung Gleichung 4 beweist.

Die Anfangswerte für $n = 0, 1$ ergeben sich direkt aus Definitionsgleichung 1.

$$\mathrm{T}_0(x) = 1, \qquad \mathrm{T}_1(x) = x$$

Exemplarisch sind hier noch die nächsten Polynome aufgeführt[4].

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
\mathrm{T}_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
\mathrm{T}_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
\mathrm{T}_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x
\end{aligned}$$

[3] Aus diesem Grund wird häufig auch der Begriff der TSCHEBYSCHEFF-Polynome verwendet.
[4] Weitere Polynome bis $n = 12$ kann man z. B. in [AS72, Tab. 22.3] finden.

Aus Rekursionsformel 4 ist außerdem erkennbar, daß das Polynom $\mathrm{T}_n(x)$ den Grad n besitzt.

2.1.4 Irrationale Darstellung

Eine weitere Form der TSCHEBYSCHEFF'schen Funktion $\mathrm{T}_n(x)$ kann man aus der Parameterbeziehung 2 erhalten, wenn man die EULER'schen Formeln der trigonometrischen Funktionen anwendet.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(x) = \cos\varphi &= \frac{e^{\mathrm{j}n\varphi} + e^{-\mathrm{j}n\varphi}}{2} \\
&= \frac{(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi)^n}{2} \\
&= \frac{(\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^n + (\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1})^n}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{T}_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2} \; . \tag{5}
$$

Aus Formel 5 kann auch der Leitkoeffizient, also der Koeffizient vor x^n, bestimmt werden[5]. Dazu geht man von der allgemeinen Formel für ein algebraisches Polynom aus

$$
\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k
$$

und bildet einen Grenzwert wiefolgt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{T}_n(x)}{x^n} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to\infty} a_k x^{k-n} \\
&= a_n \; .
\end{aligned}
$$

Umstellen und Zuhilfenahme der irrationalen Darstellung 5 liefert den Wert des Koeffizienten a_n.

[5] Der Wert des Leitkoeffizienten ist auch direkt aus der rekursiven Darstellung 4 zu entnehmen.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{T}_n(x)}{x^n} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2x^n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}(1+\sqrt{1-x^{-1}})^n + \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}(1-\sqrt{1-x^{-1}})^n \\
a_n &= 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

2.2 Spezielle Werte

Die folgenden Werte ergeben sich direkt aus Definitionsgleichung 1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(-1) &= \begin{cases} +1 & (n = 0, 2, 4, \ldots) \\ -1 & (n = 1, 3, 5, \ldots) \end{cases} \\
\mathrm{T}_n(0) &= \begin{cases} +1 & (n = 0, 4, 8, \ldots) \\ -1 & (n = 2, 6, 10, \ldots) \\ 0 & (n = 1, 3, 5, \ldots) \end{cases} \\
\mathrm{T}_n(1) &= 1
\end{aligned}
$$

2.3 Funktionsverlauf

Die Tschebyscheff'sche Funktion $\mathrm{T}_n(x)$ ist für geraden Grad n auch eine gerade Funktion, für ungeraden Grad eine ungerade Funktion.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(-x) &= \cos[n \arccos(-x)] \\
&= \cos[n(\arccos x - \pi)] \\
&= \cos(n \arccos x - n\pi) \\
\mathrm{T}_n(-x) &= (-1)^n \cos(n \arccos x) = (-1)^n\, \mathrm{T}_n(x) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Die Form des Polynoms kann deshalb folgendermaßen angenommen werden.

$$
\mathrm{T}_n(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n/2} c_k x^{2k} & (n = 0, 2, 4, \ldots) \\ x \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2} c_k x^{2k} & (n = 1, 3, 5, \ldots) \end{cases} \qquad (7)
$$

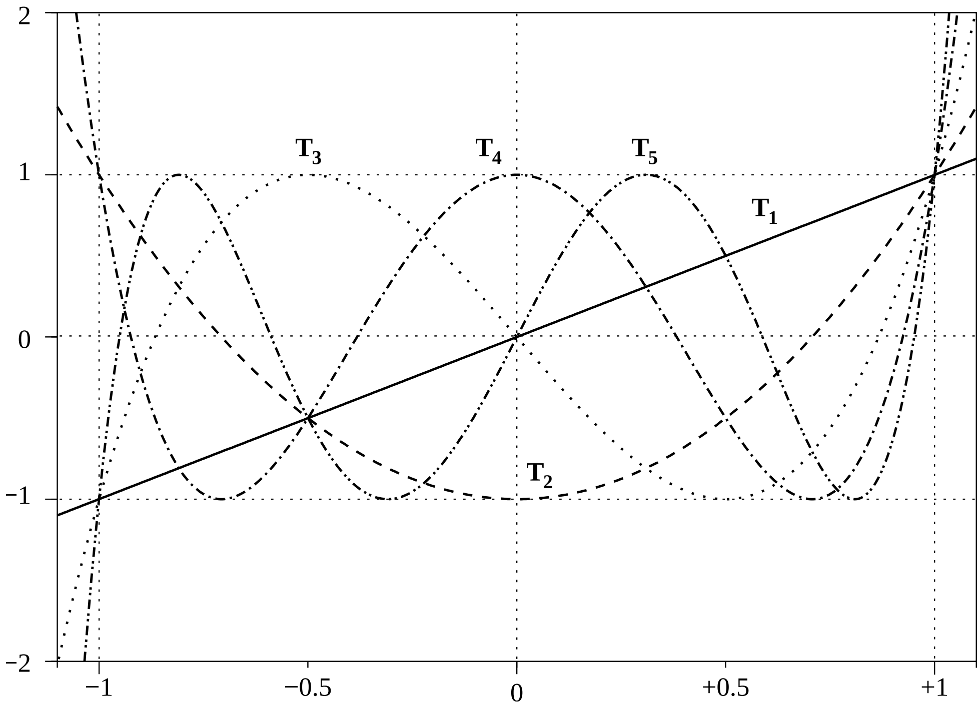


Abbildung 1: TSCHEBYSCHEFF-Funktionen $\mathrm{T}_n(x)$

Der Funktionsverlauf von $\mathrm{T}_n(x)$ ist für einige Werte n in Abbildung 1 dargestellt.

Die Funktionen $\mathrm{T}_n(x)$ approximieren im Intervall $[-1,+1]$ für eine gegebene Ordnung die Nullinie gleichmäßig[6]. Außerdem bilden die TSCHEBYSCHEFF'schen Funktionen ein sogenanntes Orthogonalsystem[7], welches für $n > 0$ durch die Beziehung

$$\delta_{nm} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{T}_n(x)\,\mathrm{T}_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases}$$

gekennzeichnet ist [HH92, 1.2.3.], [AS72, 22.5]. Beweisen läßt sich diese Relation ausgehend von der Parameterdarstellung 2 und der Ableitung $dx/d\varphi = -\sin\varphi = -\sqrt{1-x^2}$, wenn man das Integral folgendermaßen schreibt:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{T}_n(x)\,\mathrm{T}_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(n\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\ .$$

[6] Die Funktion $\mathrm{T}_n(x)$ erfüllt im Sinne der gleichmäßigen Approximation $\|f-g_n\|_\infty \Rightarrow \min$ die Zielfunktion $g(x)=0$.

[7] Orthogonale Funktionen spielen eine wichtige Rolle bei der stetigen Approximation im Mittel (GAUSS-Approximation), denn sie ermöglichen die einfache Berechnung der Koeffizienten für die Näherungsfunktion [Kör88, OM74].

Durch Erweiterung des Integrationsintervalls auf $[-\pi, +\pi]$ erhält man ein bekanntes (vollständiges) trigonometrisches Integral.

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{T}_n(x)\,\mathrm{T}_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{mn}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung enthält das sogenannte KRONECKER-Symbol

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} .$$

2.4 Nullstellen

Die Nullstellen $\underset{\circ}{x}_k$ sind leicht aus der (reellen) Parameterdarstellung 2 von $\mathrm{T}_n(x)$ zu bestimmen[8].

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ n\varphi_k &= \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \varphi_k &= \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Damit gilt für $\underset{\circ}{x}_k$

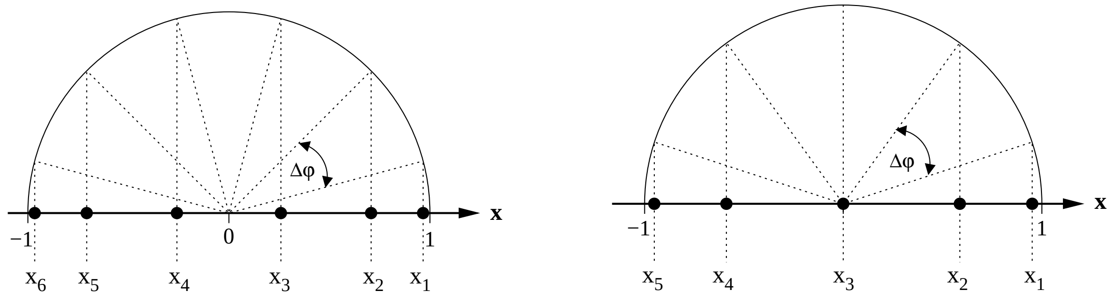
$$\begin{aligned} \underset{\circ}{x}_k &= \cos\varphi_k \\ &= \cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\ \underset{\circ}{x}_k &= \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, n\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Einschränkung des Wertebereiches für k ist an dieser Stelle sinnvoll, da sich wegen der Periodizität des Cosinus sonst Werte für $\underset{\circ}{x}_k$ wiederholen würden[9]. Bei ungeradem Grad n existiert eine Nullstelle $\underset{\circ}{x}_k = 0$ für den Index $k = (n+1)/2$.

Betragsmäßig wiederholen sich also die Nullstellen wenn k den Symmetriepunkt $(n+1)/2$ über- bzw. unterschreitet, vgl. Abbildung 2 und [HH92]. Dieser Fakt kann auch durch die Beziehung $\underset{\circ}{x}_{n-k+1} = -\underset{\circ}{x}_k$ ausgedrückt werden.

[8] Imaginäre (oder komplexe) Nullstellen existieren nicht, da $\mathrm{T}_n(\mathrm{j}x) = \cosh(n \operatorname{arcosh}|x|)$ die x-Achse niemals schneidet.

[9] Die Anzahl der Nullstellen deckt sich außerdem ausgezeichnet mit dem Grad n des Polynoms $\mathrm{T}_n(x)$ in Gleichung 4.



(a) $n = 6$ (b) $n = 5$

Abbildung 2: Nullstellenverteilung ($\Delta\varphi = \pi/n$)

$$\begin{aligned}
\underset{\circ}{x}_{n-k+1} &= \cos\left[\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\
&= \cos\left[\pi - \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\
&= -\cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right] \\
&= -\underset{\circ}{x}_k
\end{aligned}$$

Die Linearfaktordarstellung des Polynoms $\mathrm{T}_n(x)$ kann mit dieser Erkenntnis und dem schon bekannten Leitkoeffizienten 2^{n-1} vereinfacht werden. Dazu sei zuerst von ungeradem Grad n ausgegangen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(x) &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x - \underset{\circ}{x}_k) \\
&= 2^{n-1}x\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(x - \underset{\circ}{x}_k)(x + \underset{\circ}{x}_k) \\
&= 2^{n-1}x\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(x^2 - \underset{\circ}{x}_k^2)
\end{aligned}$$

Für gerades n gilt

$$\mathrm{T}_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n/2}(x^2 - \underset{\circ}{x}_k^2)\ .$$

2.5 Erste Ableitung

Die erste Ableitung ist zum Beispiel aus der Parameterform 2 zu gewinnen[10].

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} &= -\sin\varphi \\
&= -\sqrt{1-\cos^2\varphi} \\
&= -\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Mit der (in gleicher Art und Weise gewonnenen) Ableitung von y nach dem Parameter φ

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} &= -n\sin(n\varphi) \\
&= -n\sqrt{1-\cos^2(n\varphi)} \\
&= -n\sqrt{1-y^2}
\end{aligned}
$$

ergibt sich $\mathrm{T}_n'(x)$ zu

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n'(x) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{n\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = n\sqrt{\frac{1-\mathrm{T}_n^2(x)}{1-\mathrm{T}_1^2(x)}} \qquad (9)\\
&= \frac{n\sqrt{1-\cos^2(n\arccos x)}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \\
\mathrm{T}_n'(x) &= \frac{n\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}\ . \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Die Extremwerte liegen offensichtlich bei $\cos(k\pi/n)$ wobei $\mathrm{T}_n(x)$ an diesen Stellen abwechselnd die Werte ±1 annimmt. In Polynomform kann man die Ableitung von $\mathrm{T}_n(x)$ recht einfach aus Formel 7 gewinnen.

[10] Noch einfacher ist die Anwendung der Kettenregel auf die analytische Darstellung 1.

$$T_n'(x) = \begin{cases} 2x\sum\limits_{k=0}^{n/2} kc_k x^{2(k-1)} & (n = 0, 2, 4, \dots) \\ \sum\limits_{k=0}^{(n-1)/2} (2k+1)c_k x^{2k} & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} \tag{11}$$

Ähnlich wie T_n ist auch $T_n'(x)$ in Abhängigkeit von n eine gerade oder eine ungerade Funktion.

$$\begin{aligned} T_n'(-x) &= \frac{n\sin[n\arccos(-x)]}{\sin[\arccos(-x)]} \\ &= \frac{n\sin[n(\arccos x - \pi)]}{\sin(\arccos x - \pi)} \\ &= -\frac{n\sin(n\arccos x - n\pi)}{\sin(\arccos x)} \\ T_n'(-x) &= \frac{n(-1)^{n+1}\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = (-1)^{n+1}\,T_n'(x) \end{aligned} \tag{12}$$

2.6 Differentialgleichung

Mit den ersten Ableitungen nach dem Parameter φ kann man durch Gleichsetzen mit $\mathrm{d}\varphi$ die folgende Differentialgleichung[11] entwickeln [Kör88, 45], [Mei64, § 4].

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\mathrm{d}y}{n\sqrt{1-y^2}} \\ \frac{\mathrm{d}y}{n\sqrt{1-y^2}} &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (1-x^2)\,[T_n'(x)]^2 &= n^2\left[1 - T_n^2(x)\right] \end{aligned} \tag{13}$$

Sie wird durch die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ erfüllt, deren Koeffizienten a_k entweder

- rekursiv durch Anwendung von Gleichung 4;
- durch Berechnung der Nullstellen nach Formel 8 gefolgt von Ausmultiplizieren der Linearfaktordarstellung $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$;

[11] Die gleiche Differentialgleichung ergibt sich, wenn man $x = \sin u = \cos(u - \pi/2)$ und $y = \cos[n(u - \pi/2)]$ substituiert. Außerdem steckt dieser Ansatz schon implizit in Gleichung 9.

- oder aber durch Lösung des sich aus der Differentialgleichung 13 ergebenden Gleichungssystems[12]

bestimmt werden können.

3 Tschebyscheff-Funktionen zweiter Art

Die Tschebyscheff-Funktion zweiter Art ist definiert durch

$$\mathrm{U}_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{\sin(\arccos x)}\ . \tag{14}$$

Vergleich mit Formel 10 zeigt, daß es sich bei $\mathrm{U}_n(x)$ um die erste Ableitung der Funktion $\mathrm{T}_{n+1}(x)$ handelt.

$$\mathrm{U}_n(x) = \frac{1}{n+1}\mathrm{T}'_{n+1}$$

Es handelt sich bei diesen Funktionen ebenfalls um orthogonale Polynome, die nach folgender Formel auch rekursiv beschrieben werden können.

$$\mathrm{U}_n(x) = 2x\,\mathrm{U}_{n-1}(x) - \mathrm{U}_{n-2}(x)$$

In Abbildung 3 ist der Verlauf von $\mathrm{U}_n(x)$ für unterschiedlichen Grad n dargestellt.

[12] Die Bestimmung der Koeffizienten aus der Differentialgleichung ist wohl eher ein theoretischer Weg. Praktisch wird fast immer die Rekursionsformel 4 oder aber eine geschlossene Lösungsformel (die hier nicht abgeleitet wurde, vgl. [Mei64, § 4.2.]) zur Anwendung kommen.

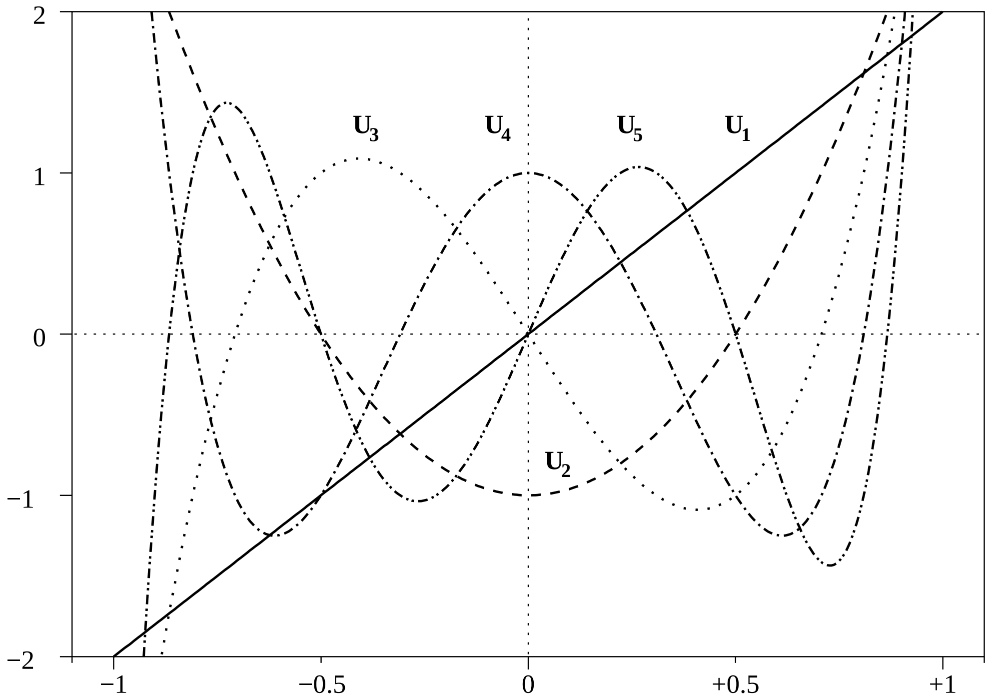


Abbildung 3: Tschebyscheff-Funktionen $U_n(x)$

Weitere Informationen zu dieser zweiten Art von Tschebyscheff-Funktionen kann man z. B. in [AS72], [HH92] oder [Mei64] nachlesen.

Literatur

[Ach67] Achieser, N. I.: *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1967.

[AS72] Abramowitz, Milton und Irene A. Stegun (Herausgeber): *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 9. Auflage, 1972.

[HH92] Hämmerlin, Günther und Karl-Heinz Hoffmann: *Numerische Mathematik*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1992.

[Kai80] Kaiser, Hans: *Numerische Mathematik und Rechentechnik II*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.

[Kör88] Körner, T.W.: *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.

[Mei64] Meinardus, Günter: *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*. Springer, Berlin, 1964.

[OM74] Oelschlägel, Dieter und Wolf-Gert Matthäus: *Numerische Methoden*, Band 18 der Reihe *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1974.

[PTVF92] PRESS, WILLIAM H., SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING und BRIAN P. FLANNERY: *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1992.

[SS88] SIEBER, N. und H.-J. SEBASTIAN: *Spezielle Funktionen*, Band 12 der Reihe *Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 3. Auflage, 1988.

[Tsc07] TSCHEBYSCHEFF, P. L.: *Oeuvres*, Band 1, 2. Commissionaires de l'Academie imperiale des sciences, St. Petersburg, 1899–1907. (Werke).