

Grundlagen für Ingenieure

Funktionentheorie

Copyright © 2005–2011 Ralf Hoppe

Revision : 255

Das vorliegende Papier richtet sich an Studenten und Ingenieure der Elektrotechnik, Signalverarbeitung oder Nachrichtentechnik, die ihr Wissen zur Funktionentheorie auffrischen wollen. Vorausgesetzt werden dabei Grundkenntnisse der höheren Mathematik, insbesondere der Differential- und Integralrechnung. Empfehlenswert für einen tieferen Einstieg halte ich besonders [BC03], [FB00] und wegen der permanenten Anschaulichkeit [Nee97], außerdem den Klassiker [WW27] sowie die kurzen anwendungsbezogenen Einführungen in [Cau54, Pap62, jeweils Anhang II].

Inhaltsverzeichnis

1	Differentiation	3
1.1	CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen	3
1.2	Harmonische Funktionen	4
1.3	Funktionaldeterminante analytischer Funktionen	5
1.4	Die Funktion $(z - z_0)^n$	6
2	Integration	8
2.1	Satz von CAUCHY	8
2.1.1	Stammfunktion	8
2.1.2	Bestimmtes Integral	9
2.2	CAUCHY's Integralformel	11
2.3	Integralformel für Ableitungen	14
3	LAURENT-Reihe	16

4 Residuensatz	18
4.1 Hebbare Singularitäten	20
4.2 Pole	20
4.3 Wesentliche Singularitäten	23
5 Satz von LIOUVILLE	23
6 Lemma von JORDAN	25
7 Uneigentliche Integrale	28
7.1 Anwendung von JORDAN'S Lemma im Fall $\alpha = 0$	28
7.1.1 Stetige Funktionen	28
7.1.2 Gebrochen rationale Funktionen	31
7.1.3 Halb-analytische Funktionen	31
7.2 Anwendung von JORDAN'S Lemma im Fall $\alpha \neq 0$	40

Abbildungsverzeichnis

1 Integrationswege zur Herleitung von CAUCHY'S Integralformel	12
2 Eingeschlossene Singularitäten	19
3 Integrationsweg(e) für reelles α	29
4 Integrationsweg mit Singularität auf imaginärer Achse	38
5 Integrationsweg(e) für imaginäres α	41

Tabellenverzeichnis

1 Berechnungsformeln für halbanalytische Funktionen	36
2 Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von Residuen	42

Symbolverzeichnis

$\frac{df(z)}{dz}$ Ableitung der Funktion $f(z)$ nach z

\mathcal{H} HILBERT-Transformation

$\text{res}_{z_0} f(z)$ Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0

sinc(z) Spaltfunktion (Sinus Cardinalis)

1 Differentiation

1.1 CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen

Holomorphe bzw. analytische Funktionen¹ sind solche, deren Grenzwert

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

existiert und eindeutig ist, die also an der Stelle z differenzierbar sind. Man fordert hierbei nicht unbedingt, daß $f(z)$ für *alle* z einen solchen Grenzwert hat – man kann sich auch auf ein bestimmtes Gebiet beschränken². Die “Einwertigkeit” des Grenzwertes (*One-Valued*) spielt auf Funktionen an, bei denen er davon abhängt, aus welcher Richtung man sich nähert. Er kann sogar dann existieren, wenn der Funktionswert selbst nicht existiert (wie z. B. $\sin z/z$ an der Stelle $z = 0$). Nicht analytisch sind unter anderen die Funktionen $1/(z - a)$ bei a oder auch $\log z$ für $z = 0$.

Eine Schlußfolgerung von B. RIEMANN in Bezug auf die “Einwertigkeit” des Differentialquotienten (nach Gleichung 1) der analytischen Funktion $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ mit $z = x + jy$ war, daß bei Annäherung in x -Richtung, also bei konstantem y (horizontal) der gleiche Grenzwert gelten muß, wie bei Annäherung aus y -Richtung (bei konstantem x , also vertikal)³.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{\partial f(z)}{\partial(jy)} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + j \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -j \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen⁴

¹In der komplexen Analysis nennt man eine Funktion analytisch, wenn sie durch eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ dargestellt werden kann [Hur00, II-3]. Da jede holomorphe Funktion auch analytisch ist, werden beide Begriffe oft äquivalent gebraucht.

²Eine Funktion $f(z)$, die auf ganz \mathbb{C} analytisch ist und im Endlichen keine Singularität besitzt, nennt man *ganze* Funktion (typische Vertreter sind Kreis-, Exponential- und Hyperbelfunktionen) [Hur00, I-3, § 8].

³Ein exakter Beweis wird ausgehend von der Definition des Differentialquotienten in [BC03] und [WW27, § 5.1] geführt.

⁴Sie sind eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit von $f(z)$ an der Stelle z .

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \qquad (3)$$

und wegen der Unabhängigkeit des Grenzwertes von jedweder Annäherungsrichtung ($df/dz = \partial f/\partial x = \partial f/\partial(jy)$) außerdem

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + j\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - j\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \qquad (4)$$

bzw.

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = -j\frac{\partial f(z)}{\partial y} . \qquad (5)$$

1.2 Harmonische Funktionen

Differenziert man beide Teile der CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen 3 jeweils nach x und y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

und addiert/subtrahiert sie daraufhin diagonal, so erhält man (wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von partiellen Ableitungen, Satz von SCHWARZ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Real- und Imaginärteil analytischer Funktionen sind harmonische bzw. Potentialfunktion, d. h. sie genügen den LAPLACE-Gleichungen $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ und $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$. Außerdem ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}[f'(z)] = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}[f'(z)] \qquad \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}[f'(z)] = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im}[f'(z)]$$

auch $f'(z)$ und jede weitere Ableitung wieder analytisch.

1.3 Funktionaldeterminante analytischer Funktionen

Nimmt man $f(z)$ als Abbildung des Vektors $\mathbf{z} = (x, y)^T$ auf $\mathbf{f} = (u, v)^T$ wahr, dann ist oftmals die Funktionaldeterminante (JACOBI-Determinante) von besonderem Interesse⁵. Gerade für analytische Funktionen hat sie eine sehr einfache Lösung, welche sich ebenfalls aus den CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen ableitet.

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2$$

Eine Schlußfolgerung ist die, daß für alle Punkte z der komplexen Ebene, an denen $f'(z)$ einen Wert ungleich Null hat, die Funktionaldeterminante nicht verschwindet⁶. Sollte $f'(z)$ in der Umgebung von z außerdem noch stetig sein, dann existiert eine (eindeutige) Umkehrfunktion $z = \psi(f)$ für alle $f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

⁵Beispielsweise bei Koordinatentransformationen, Flächen- und Volumenintegralen, also Anwendungen die mit infinitesimalen Flächenelementen der Art $dA = dx dy$ rechnen.

⁶Eine Funktion f wird auch als *regulär* bezeichnet, wenn die Funktionaldeterminante nicht verschwindet.

1.4 Die Funktion $(z - z_0)^n$

Besondere Bedeutung für viele Beweise der komplexen Analysis hat die Funktion $(z - z_0)^n$. Hier soll einmal mit Hilfe der CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen deren Holomorphiegebiet bestimmt werden⁷. Wir gehen dazu von Gleichung 2 aus und bilden die partiellen Ableitungen nach x und y . Zur Vereinfachung soll die Exponentialdarstellung $z - z_0 = r e^{j\theta}$ verwendet werden, wobei berücksichtigt werden muß, daß eigentlich $r := r(x, y)$ und $\theta := \theta(x, y)$ gilt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z - z_0)^n &= \frac{\partial}{\partial x} r^n e^{jn\theta} \\ &= nr^{n-1} e^{jn\theta} \frac{\partial r}{\partial x} + r^n e^{jn\theta} jn \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= nr^n e^{jn\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + j \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= n(z - z_0)^n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + j \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Für die Ableitung nach y gibt es bis hierher keinen Unterschied, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial y}(z - z_0)^n = n(z - z_0)^n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y} + j \frac{\partial \theta}{\partial y} \right).$$

Setzen wir jetzt (kurz) $z_0 = 0$ und erarbeiten die Zusammenhänge zwischen den Differentialen der arithmetischen und der Exponentialform für $z = x + jy = r e^{j\theta}$. Dazu soll von den bekannten Formeln

$$r = |z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \angle z = \arctan \frac{y}{x}$$

ausgegangen und dann die Ableitungen gebildet werden.

⁷Meist wird dieser ausführliche Weg aus Aufwandsgründen gemieden, obwohl er eine gute Übung darstellt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2} & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}\end{aligned}$$

Jetzt können die so gewonnenen Ausdrücke eingesetzt werden, was mit $z_0 = x_0 + jy_0$ zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z-z_0)^n &= n(z-z_0)^n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} + j \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= n(z-z_0)^n \left(\frac{x-x_0}{r^2} - j \frac{y-y_0}{r^2} \right) \\ &= \frac{n}{r^2} (z-z_0)^n (z-z_0)^* = n(z-z_0)^{n-1}\end{aligned}$$

führt⁸. Ähnlich wird mit der Ableitung nach y verfahren, nur das gedanklich noch der Zwischenschritt der Substitution nach jy auszuführen ist.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(jy)}(z-z_0)^n &= n(z-z_0)^n \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - j \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &= n(z-z_0)^n \left(\frac{x-x_0}{r^2} - j \frac{y-y_0}{r^2} \right) \\ &= \frac{n}{r^2} (z-z_0)^n (z-z_0)^* = n(z-z_0)^{n-1}\end{aligned}$$

Schlußfolgerung: $(z-z_0)^n$ ist für positives n an jeder Stelle z analytisch, denn es gilt Gleichung 2 in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial z}(z-z_0)^n = n(z-z_0)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}(z-z_0)^n = \frac{\partial}{\partial(jy)}(z-z_0)^n .$$

Für den Fall $n < 0$ ist $f(z)$ jedoch nur für $z \neq z_0$ analytisch, denn beide Seiten der vorangegangenen Äquivalenz sind sonst unbestimmt. Ein sich daraus ergebendes Resultat, welches in Abschnitt 3 bewiesen wird, ist:

⁸Wobei $(z-z_0)(z-z_0)^* = r^2$ berücksichtigt wurde.

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi j & (n = -1) \end{cases}.$$

2 Integration

2.1 Satz von CAUCHY

2.1.1 Stammfunktion

Für eine analytische Funktion $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ ist die Existenz einer Stammfunktion $F(z) = U(x, y) + jV(x, y)$ mit $F'(z) = f(z)$ dann gegeben, wenn die Integrabilitätsbedingung nach Gleichung 3 erfüllt und außerdem die partiellen Ableitungen stetig sind. Der erste Teil der Behauptung ist zu verifizieren, indem man mit $dz = dx + jdy$ eine formale Zerlegung von $F(z)$ in Real- und Imaginärteil vornimmt [WW27, § 4-6].

$$\begin{aligned} F(z) &= \int f(z) dz \\ &= \int [u(x, y) + jv(x, y)] (dx + jdy) \\ &= \int \underbrace{u(x, y) dx - v(x, y) dy}_{dU} + j \int \underbrace{u(x, y) dy + v(x, y) dx}_{dV} \end{aligned} \quad (6)$$

Erinnern wir uns nun an die Aussage von Abschnitt 1.2, daß die Ableitung einer analytischen Funktion auch wieder analytisch ist, so gilt Gleichung 4 in der Form

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) = F'(z) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + j \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} - j \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

und äquivalent dazu:

$$u(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \quad v(x, y) = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}. \quad (7)$$

Mit diesen einfachen Resultaten kann man die Integranden in Formel 6 als Differentialformen⁹ in \mathbb{R}^2 ausdrücken.

$$dU = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} dy \quad dV = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} dy \quad (8)$$

Aus der Differential- und Integralrechnung mehrerer Veränderlicher (sowie Verallgemeinerungen wie der Vektoranalysis oder Differentialgeometrie) ist nun bekannt, daß für die totalen Differentiale dU und dV genau dann Stammfunktionen existieren, wenn $U_{xy} = U_{yx}$ bzw. $V_{xy} = V_{yx}$ gilt. Diese Bedingung ist für stetige Funktionen aber grundsätzlich (Satz von SCHWARZ) und für harmonische Funktionen erst recht erfüllt.

2.1.2 Bestimmtes Integral

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existiert eine Verbindung zwischen der Stammfunktion und dem bestimmten Integral, welche unter bestimmten Bedingungen auch im komplexen Fall Gültigkeit hat [BC03, 42].

$$\frac{d}{dz} \int_{a+jb}^z f(\xi) d\xi = f(z)$$

Anders als im eindimensionalen Fall muß man berücksichtigen, daß bei der Integration zwischen zwei Punkten ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) der Integrationsweg eine Rolle spielen kann. Ist er in Parameterform als $z = x + jy = \varphi(t)$ darstellbar, so gilt mit $dz = \varphi'(t) dt$ für das Kurvenintegral (zweiter Art) allgemein:

$$F(z) = \int_C f(z) dz = \int_C f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt .$$

Sollte $f(z)$ aber analytisch auf der Kurve C sein¹⁰, dann ist das Integral wegunabhängig und man kann in gewohnter Art und Weise

⁹Totales Differential, welches für eine infinitesimale Änderung der Variablen x, y die resultierende Änderung dU bzw. dV beschreibt.

¹⁰Man sagt auch, die Funktion $f(z)$ muß auf dem Integrationsweg (der vollständig in einem einfach zusammenhängenden Gebiet verlaufen muß, Nebenbedingung) stetig differenzierbar sein.

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) \quad (9)$$

rechnen [BC03, 42]. Eine anschauliche Begründung steckt in den Beziehungen $U_{xy} = U_{yx}$ bzw. $V_{xy} = V_{yx}$, denn sie weisen auf infinitesimaler Ebene (im Sinne des RIEMANN'schen Differentialbegriffs) daraufhin, daß die "Fortschrittsrichtung" oder -Reihenfolge vollkommen unerheblich ist. Exakt kann die Wegunabhängigkeit z. B. mit Hilfe der Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher bewiesen werden¹¹. Dazu gehen wir von der Parameterdarstellung $z = \psi(t) + j\phi(t)$ für den Integrationsweg C aus, bilden in einem zweiten Schritt die Ableitungen von U bzw. V nach t und ersetzen anschließend die (entstehenden) partiellen Ableitungen durch $u(x,y)$ und $v(x,y)$ unter Zuhilfenahme von Beziehung 7.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= U[\psi(t), \phi(t)] & \hat{V}(t) &= V[\psi(t), \phi(t)] \\ \frac{d\hat{U}}{dt} &= \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \psi'(t) + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \phi'(t) & \frac{d\hat{V}}{dt} &= \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \psi'(t) + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} \phi'(t) \\ \hat{U}'(t) &= u(x,y)\psi'(t) - v(x,y)\phi'(t) & \hat{V}'(t) &= v(x,y)\psi'(t) + u(x,y)\phi'(t) \end{aligned}$$

Die letzten Ausdrücke stellen genau die Differentialformen in Formel 6 dar, was uns zum Ende des Beweises bringt.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_C [u(x,y)\psi'(t) - v(x,y)\phi'(t)] dt & V(x,y) &= \int_C [u(x,y)\psi'(t) + v(x,y)\phi'(t)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \hat{U}'(t) dt & &= \int_{t_1}^{t_2} \hat{V}'(t) dt \\ &= \hat{U}(t_2) - \hat{U}(t_1) & &= \hat{V}(t_2) - \hat{V}(t_1) \\ &= U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1) & &= V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Ist die Kurve C sogar geschlossen, d. h. z_2 nähert sich wieder z_1 , dann kommt man zum Hauptsatz der Funktionentheorie bzw. Satz von CAUCHY [WW27, § 5-2], [Hur00, I-5, § 6], [BC03, 44-46]:

Ist f eine Funktion von z , analytisch¹² an allen Punkten auf und innerhalb der ge-

¹¹Ein Beweis des Satzes von CAUCHY mit Mitteln der Vektoranalysis ist in [Cau54, II-5] zu finden.

¹²Voraussetzung ist eigentlich nur, daß $f(z)$ innerhalb und auf C kontinuierlich ist (vgl. Anmerkungen und Beweis

geschlossenen Kurve C , dann gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (10)$$

Sollte $f(z)$ im Inneren von C nicht überall analytisch sein, dann kann das geschlossene Kurvenintegral einen Wert ungleich Null besitzen (siehe dazu Abschnitt 3).

Damit sind uns nunmehr drei gleichwertige Kriterien für den Nachweis, daß es sich bei $f(z)$ um eine analytische Funktion handelt, bekannt:

1. die CAUCHY-RIEMANN'schen Differentialgleichungen,
2. die LAPLACE-Gleichung für den Real- und Imaginärteil und
3. der Satz von CAUCHY (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals¹³).

2.2 CAUCHY'S Integralformel

Als ein Resultat des Satzes von CAUCHY kann man jeden Wert $f(z)$, wobei die Funktion f in der Umgebung von z analytisch sei, durch ein Kurvenintegral ausdrücken. Dazu definiert man einfach $f(z)/(z - z_0)$ als neue Funktion, welche im Punkt z_0 nicht analytisch ist, und integriert auf einer den Punkt z_0 einschließenden Kurve. Da sich der Integralsatz von CAUCHY nur auf Funktionen anwenden läßt, die im Inneren der Kurve C analytisch sind, umgehen wir diese Widrigkeit wie in Abbildung 1 dargestellt. Dabei wird die Kurve C zuerst in zwei halbkreisförmige Teilkurven C_1 und C_2 nach Teilbild 1a zerlegt.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Danach werden C_1 und C_2 entsprechend Abbildung 1b separiert und als Kurven so geschlossen, daß jede für sich analytisch ist. Außerdem sollen sich beide Kurven aus dem originalen Stück des äußeren Halbkreises, bezeichnet mit C'_1 bzw. C'_2 sowie dem inneren Halbkreis (inklusive der waagerechten Teilstücke) C''_1 bzw. C''_2 zusammensetzen. Dann gilt nach CAUCHY'S Integralsatz 10:

in [WW27, § 5.2]).

¹³Der Beweis der umgekehrten Behauptung, nämlich daß ein Verschwinden des Integrals auf eine analytische Funktion schließen läßt, wird Satz von MORERA genannt [Kör88, 75], [FB00, II-3.5].

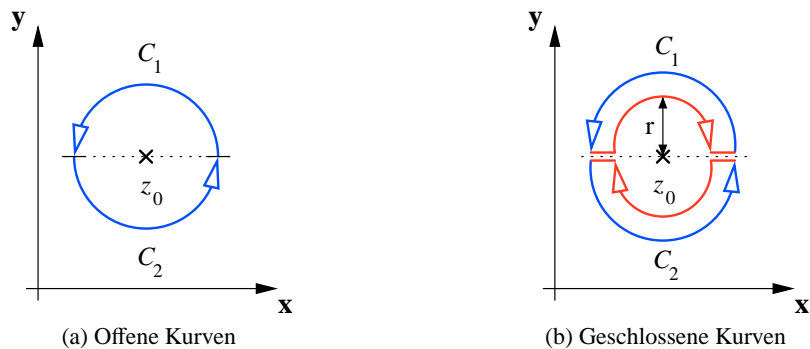


Abbildung 1: Integrationswege zur Herleitung von CAUCHY's Integralformel

$$\oint_{C_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{C'_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0, \quad \text{mit } \nu = 1, 2$$

und deshalb

$$\int_{C'_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = - \int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0} dz .$$

Mit der Substitution

$$z - z_0 = r e^{j\theta} \qquad \frac{dz}{d\theta} = j r e^{j\theta} \qquad (11)$$

kann man für jeden der Integralausdrücke auf den inneren Kurven

$$\int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = j \int_{C''_\nu} \frac{f(z)}{r e^{j\theta}} r e^{j\theta} d\theta = j \int_{C''_\nu} f(z_0 + r e^{j\theta}) d\theta$$

schreiben. Lassen wir jetzt den Radius r gegen Null gehen, d. h. betrachten den Wert auf C''_ν in der Umgebung von z_0 :

$$\lim_{r \rightarrow 0} j \int_{C''_\nu} f(z_0 + r e^{j\theta}) d\theta = -j \int_{C''_\nu} f(z_0) d\theta = -j f(z_0) \theta|_{C''_\nu} .$$

Da sich die Integrale auf dem analytischen Teil der "glattegezogenen" Kurven C''_ν wegen der entgegengesetzten Richtung kompensieren, ergibt sich schlußendlich:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \int_{C'_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{C'_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \\
&= -j f(z_0) (\theta|_{C'_1} + \theta|_{C'_2}) \\
&= -j f(z_0) (-2\pi - 0) = 2\pi j f(z_0) .
\end{aligned}$$

Ein ausschließlich rechnerischer Beweis ist folgendermaßen zu erbringen:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \oint_C \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0} dz \\
&= \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz + f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z-z_0}
\end{aligned}$$

Der erste Summand stellt für $z \rightarrow z_0$ eine hebbare Singularität dar (vgl. Abschnitt 4), d. h. der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z)$$

existiert. Damit ist der Integrand eine analytische Funktion für $z \rightarrow z_0$ und wegen des Satzes von CAUCHY das Integral

$$\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 .$$

Der zweite Summand ist mit der Substitution 11

$$f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z-z_0} = j f(z_0) \oint_C d\theta = j f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi j f(z_0) \tag{12}$$

und somit

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi j f(z_0) . \tag{13}$$

Benennt man noch die Variablen um ($z_0 := z$ und $z := \xi$), dann erhält man die CAUCHY'sche Integralformel [BC03, 47].

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (14)$$

Bei der Interpretation fällt sofort die bemerkenswerte Eigenschaft einer analytischen Funktion (innerhalb von C) auf, daß der Funktionswert $f(z_0)$ eindeutig durch die Randwerte auf der Kurve C bestimmt ist.

2.3 Integralformel für Ableitungen

Die (erste) Ableitung einer analytischen Funktion kann man auch durch ein Kurvenintegral in der komplexen Ebene ausdrücken [WW27, § 5·22]. Um dies nachzuweisen, soll zuerst CAUCHY's Integralformel 14 in die Definition der ersten Ableitung einer Funktion f an der Stelle z (1) eingesetzt werden.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} d\xi - \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right]$$

Nun werden die Argumente beider Integrale auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, dann im Zähler ausmultipliziert und zuletzt der Grenzwert aufgelöst¹⁴.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \oint_C \frac{f(\xi)(\xi - z) - f(\xi)(\xi - z - h)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z)} d\xi \end{aligned}$$

Der so gewonnene Ausdruck

¹⁴Ein in mathematischer Strenge geführter Beweis, der auch die Kurve C eingehend berücksichtigt, ist in [WW27, § 5·22] zu finden.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \quad (15)$$

ermöglicht die Berechnung der Ableitung von f an jeder Stelle z durch ein Kurvenintegral. Voraussetzung dafür ist nur, daß der Punkt z in der komplexen Ebene von einem Integrationsweg eingeschlossen wird, auf deren Rande und in dessen Inneren $f(z)$ analytisch ist.

Durch erneute Anwendung der obigen Formeln kann man zur zweiten Ableitung $f''(z)$ gelangen [WW27, § 5·22].

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

Für weitere Ableitungen ergibt sich in der Fortsetzung die Verallgemeinerte CAUCHY'sche Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad (16)$$

welche durch vollständige Induktion beweisbar ist. Sie führt zu der wesentlichen Schlußfolgerung, daß eine analytische Funktion beliebig oft differenziert werden kann¹⁵.

Für den speziellen Fall, daß C ein Kreis mit Radius r um z ist, kann man Beziehung 16 konkretisieren. Dazu ist die Substitution $\xi - z = r e^{j\theta}$ und daraus abgeleitet $d\xi/d\theta = j r e^{j\theta}$ wieder hilfreich.

¹⁵Unter der immer gegebenen Voraussetzung, daß die Integrationskurve C so nah bei z liegt, daß sie in einem einfach zusammenhängenden Gebiet verläuft.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r e^{j\theta})}{r^{n+1} e^{j(n+1)\theta}} j r e^{j\theta} d\theta$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{j\theta}) e^{-jn\theta} d\theta \quad (17)$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{j\theta}) e^{-j\theta} d\theta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{j\theta}) d\theta \quad (18)$$

In letzter Formel (18) wird die sogenannte Mittelwerteigenschaft von $f(z)$ bei der Integration auf dem umschließenden Kreis deutlich.

3 LAURENT-Reihe

Bei der LAURENT-Reihenentwicklung wird davon ausgegangen, daß sich die komplexwertige Funktion $f(z)$ um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine unendliche Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (19)$$

entwickeln läßt [WW27, § 5·6,6·1], [BC03, 55]. Integriert man $f(z)$ auf der Kurve C um z_0 , wobei

- $f(z)$ innerhalb C analytisch sein muß
- und C ein Kreis mit möglichst kleinem Radius sein soll,

dann ergibt sich mit der Darstellung¹⁶

$$f(z) = \dots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \underbrace{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots}_{\Phi(z)} \quad (20)$$

für das Integral

¹⁶Die Funktion $\Phi(z)$ entspricht der TAYLOR-Reihenentwicklung (Potenzreihe) einer reellen Funktion [BC03, 53].

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left[\oint_C a_n (z - z_0)^n dz \right] + \oint_C a_{-1} (z - z_0)^{-1} dz + \oint_C \Phi(z) dz.$$

Die Funktion $\Phi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, der sogenannte Regulärteil, ist analytisch, weshalb dieses Integral verschwindet. Gleiches gilt für das Integral über den Hauptteil (ohne a_{-1}) der LAURENT-Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \oint_C \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} dz = 0,$$

was sich ausgehend von Substitutionsformel 11 nachweisen läßt.

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz &= \oint_C \frac{j r e^{j\theta}}{r^n e^{jn\theta}} d\theta \\ &= j r^{-(n-1)} \oint_C e^{-j(n-1)\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{(n-1)r^{n-1}} e^{-j(n-1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{für } n \neq 1 \end{aligned}$$

Es bleibt also nur das Integral über $a_{-1}(z - z_0)^{-1}$ übrig, dessen Wert nach CAUCHY's Integralformel 13 genau $2\pi j a_{-1}$ ist¹⁷. Den Koeffizienten a_{-1} nennt man das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0 und kürzt ihn (meist) mit $\text{res}_{z_0} f(z)$ ab.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz = 2\pi j a_{-1} = 2\pi j \text{res}_{z_0} f(z) \quad (21)$$

Wie bestimmen sich nun aber die anderen Koeffizienten a_n ? Zur Beantwortung dividieren wir einfach Gleichung 20 durch $(z - z_0)^{n+1}$.

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \dots + a_{n-1}(z - z_0)^{-2} + a_n(z - z_0)^{-1} + a_{n+1} + a_{n+2}(z - z_0) + a_{n+3}(z - z_0)^2 + \dots$$

Integration über die neu gebildete Funktion $(z - z_0)^{-(n-1)} f(z)$ hat dieselbe Konsequenz wie vor-

¹⁷Die Funktion $f(z)$ in der Integralformel 13 von CAUCHY wird hier durch $f(z) := a_{-1}$ repräsentiert.

dem – es bleibt nur der Term mit dem Exponenten -1 übrig, d. h. sowohl Haupt- als auch Regu-
lärteil verschwinden wieder.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi j a_n$$

Durch Kombination der Beziehungen kann man für die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{Z}$) jetzt eine ge-
meinsame Berechnungsvorschrift angeben.

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (22)$$

Aus vorangegangener Formel ist der Zusammenhang zwischen Holomorphie und Analytizität
einer komplexen Funktion $f(z)$ erklärbar. Nehmen wir dazu an, daß $f(z)$ in z_0 holomorph ist –
dann

- verschwinden alle Koeffizienten a_i mit negativem Index (Satz von CAUCHY, Formel 10);
- entsprechen die mit positivem Index genau den Koeffizienten einer TAYLOR-Reihe (bzw.
MACLAURIN-Reihe im Komplexen, vgl. [BC03, 53]), wenn man Beziehung 16 berück-
sichtigt¹⁸.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & (n \geq 0) \\ \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z)(z-z_0)^{|n|-1} dz = 0 & (n < 0) \end{cases} \quad (23)$$

Die LAURENT-Reihe entartet in diesem Sinne zu einer Potenzreihe, woraus folgt, daß die Funktion
 $f(z)$ analytisch ist. Sollte $f(z)$ im Punkt z_0 dagegen nicht holomorph sein, dann haben wir es mit
einer Singularität zu tun, d. h. ihre LAURENT-Reihe ist von der TAYLOR-Reihe verschieden. Welche
Fälle dabei zu unterscheiden sind, stellt der folgende Abschnitt dar.

4 Residuensatz

Der Residuensatz ist eine logische Fortführung bzw. Anwendung der Erkenntnisse des vorigen
Abschnittes, in welchem der Begriff des Residuums erstmalig auftauchte [FB00, III-6]. Er er-

¹⁸Für die Existenz der Reihenentwicklung ist Voraussetzung, daß $f(z)$ beliebig oft differenzierbar ist.

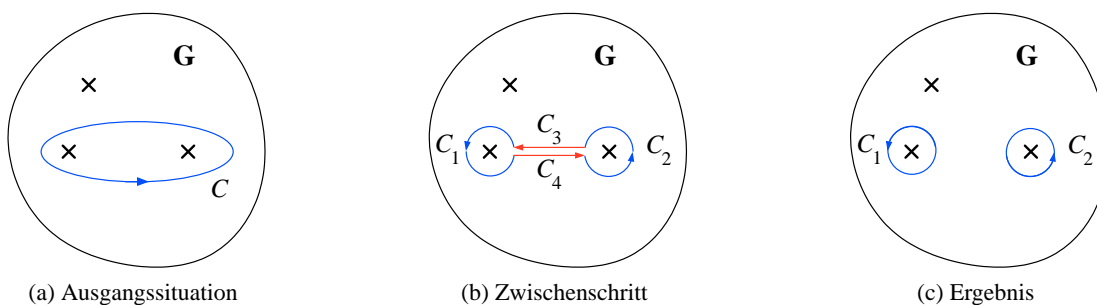


Abbildung 2: Eingeschlossene Singularitäten

möglichst die einfache Berechnung von (geschlossenen) Kurvenintegralen, wenn innerhalb des Integrationsweges ein oder mehrere Singularitäten von $f(z)$ liegen¹⁹.

Einleitend müssen wir uns aber mit der Frage befassen, wie sich der Einschluß *mehrerer* singulärer Punkte auf den Wert des umlaufenden Integrals auswirkt. Dazu soll im Beispiel nach Abbildung 2a um zwei solcher Punkte auf dem (geschlossenen) Weg C integriert werden [Mar95, 10.3].

Ist die Funktion $f(z)$ außer an den Singularitäten und insbesondere auf C analytisch, dann kann man den Integrationsweg entsprechend Abbildung 2b verändern²⁰. Eine solche Wahl des Integrationsweges C führt dazu, daß sich die Kurvenintegrale über C_3 und C_4 aufheben, also

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \underbrace{\int_{C_3} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz}_0$$

gilt. Dieser Umstand ist graphisch in Abbildung 2c dargestellt und kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz.$$

Umschließt ein Kurvenintegral auf seinem Weg n Singularitäten, dann kann dessen Wert durch separate Integration um alle n singulären Punkte bestimmt werden²¹.

¹⁹Insbesondere Gleichung 21 zeigt deutlich, daß die Kenntnis des Residuums $\text{res}_{z_0} f(z) := a_{-1}$ sehr hilfreich bei der Berechnung von $\oint_C f(z) dz$ sein kann.

²⁰Dieser Fakt ist nur indirekt mit der Wegunabhängigkeit erklärbar (da im Inneren von C Singularitäten liegen), exakter müßte man sich auf den sogenannten Deformationssatz berufen [Nee97, 8-VI].

²¹Ein einfach zusammenhängendes Gebiet G nach Abbildung 2 vorausgesetzt.

$$\oint_C f(z) dz = \sum_n \left[\oint_{C_n} f(z) dz \right] \quad (24)$$

Entwickelt man jetzt die Funktion $f(z)$ um die einzelnen Singularitäten herum zu einzelnen LAURENT-Reihen, so kann man mit Hilfe von Gleichung 21 den Residuensatz formulieren.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_n \text{res}_{z_n} f(z) \quad (25)$$

Wie berechnet man jedoch das Residuum an einem (isolierten) singulären Punkt ohne Kenntnis der LAURENT-Reihenentwicklung von $f(z)$? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir (die) drei Typen von Singularitäten z_n , welche sich durch die Art des Hauptteils $h(z)$ der LAURENT-Reihe von $f(z)$ unterscheiden [FB00, III-4.10].

4.1 Hebbare Singularitäten

Hebbare Singularitäten sind solche, für die $f(z)$ in der Umgebung von z_0 beschränkt (und in z_0 analytisch) ist [FB00, III-4.2]. Der RIEMANN'sche Hebbarkeitsatz formuliert die Eigenschaft folgendermaßen:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0. \quad (26)$$

Existiert für $f(z)$ aufgrund der Holomorphieeigenschaft in z_0 die Ableitung $f'(z_0)$ und $f(z_0)$ ist beschränkt ($\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| < \infty$), so verschwindet wegen des Satzes von CAUCHY der Hauptteil $h(z)$ gänzlich und es gilt $\text{res}_{z_0} f(z) = 0$. Ein typischer Vertreter dieser Klasse von Singularitäten ist die Stelle $z_0 = 0$ der Spaltfunktion²² $f(z) = \sin z/z$.

4.2 Pole

Singularitäten, bei denen man von einem Pol der Ordnung n spricht (ein- oder mehrfacher Pol), sind durch den endlichen Hauptteil

²²Die TAYLOR-Reihenentwicklung der Spaltfunktion stimmt genau mit der LAURENT-Reihe (die deshalb nur einen Regulärteil besitzt) überein: $\text{sinc } z = 1 - z^2/3! + z^4/5! - z^6/7! + \dots$

$$h(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

gekennzeichnet²³. Der Grund liegt in der Darstellungsmöglichkeit von $1/f(z)$ durch $(z-z_0)^n\psi(z)$ und demzufolge $f(z) = (z-z_0)^{-n}\phi(z)$ mit $\phi(z) = 1/\psi(z)$. Die Funktion $\phi(z)$ ist bei z_0 selbst analytisch, denn alle Pole sind entsprechend ihrer Vielfachheit aus $f(z)$ "herausgezogen" und im Faktor $(z-z_0)^{-n}$ enthalten. Deshalb kann $\phi(z)$ um z_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden²⁴.

$$\phi(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + c_3(z-z_0)^3 + \dots$$

Die LAURENT-Reihe für $f(z)$ erhält dadurch die Form:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^{-n}\phi(z) \\ &= \frac{c_0}{(z-z_0)^n} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{n-1}}{z-z_0} + c_n + c_{n+1}(z-z_0) + c_{n+2}(z-z_0)^2 + \dots \\ &= \underbrace{\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{h(z)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

d. h. der Hauptteil $h(z)$ umfaßt nur eine endliche Zahl von Koeffizienten a_k . Diese Eigenschaft ermöglicht die Berechnung des Residuums auf der Grundlage der folgenden Formel:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]. \quad (28)$$

Die dahinter steckende Idee besteht darin, $f(z)$ nach Gleichung 27 durch Multiplikation mit $(z-z_0)^n$ zu einer Polynomfunktion zu machen und dann den Koeffizienten a_{-1} durch $n-1$ -malige Ableitung zu extrahieren. Die Richtigkeit kann man einfach durch Einsetzen von $f(z)$ nachweisen.

²³Damit ist gemeint, daß $a_{-n} \neq 0$ ist, alle weiteren a_k mit $k > n$ jedoch verschwinden.

²⁴Man denke an Formel 23 und die mit ihr verbundenen Ideen auf Seite 18.

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left[a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots \right. \\ \left. + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + a_0(z-z_0)^n + a_1(z-z_0)^{n+1} + \dots \right]$$

Differentiation der einzelnen Summanden, gefolgt von der Grenzwertbildung bestätigt Beziehung 28.

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(n-1)! a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1(z-z_0)^2 \right. \\ \left. + \frac{(n+2)!}{3!} a_2(z-z_0)^3 + \frac{(n+3)!}{4!} a_3(z-z_0)^4 + \dots \right] = a_{-1}$$

Beispiele von Funktionen mit Pol sind $f(z) = \operatorname{cosec} z$ bei $z_0 = k\pi$ (Ordnung $n = 1$) sowie $f(z) = (z-1)^{-2}$ für $z_0 = 1$ (Ordnung $n = 2$)²⁵.

Speziell für einfache Pole ($n = 1$) gilt:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0) f(z)], \quad (29)$$

was bei gebrochen rationalen Funktionen zu

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{u(z)}{v(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{u(z)}{v(z)} \right] = u(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z-z_0}{v(z)} = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)} \quad (30)$$

führt²⁶ [Nee97, 9-III].

²⁵Wie man schon an der Form erkennen kann, entspricht in diesem Fall die Funktion ihrer LAURENT-Reihe.

²⁶Die Herleitung ist einfach, wenn man $n = 1$, $\lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v(z_0) = 0$ sowie die Regel von BERNOULLI-L'HOSPITAL berücksichtigt.

4.3 Wesentliche Singularitäten

Wesentliche Singularitäten sind solche, die weder hebbar noch ein Pol sind [Nee97, 6-VIII], [FB00, III-4.3]. Der Hauptteil $h(z)$ solcher Funktionen hat die Form

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k},$$

d. h. alle Koeffizienten a_{-k} existieren (und zwar unendlich viele). Das Residuum an der Stelle z_0 ist für diesen Typ von Funktion üblicherweise mittels Integrationsformel 21 zu bestimmen (wie z. B. für $e^{(1-z)^{-1}}$ an der Stelle $z_0 = 1$).

Besitzt eine Funktion $f(z)$ keine wesentlichen Singularitäten²⁷, dann muß das Produkt $(z - z_0)^n f(z)$ die Hebbbarkeitsbedingung

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0$$

für irgendeine Zahl $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Bei hebbaren Singularitäten stellt man fest, daß es sich mit $n = 1$ genau um Formel 26 handelt, bei Polen läßt sich diese Bedingung aus Darstellung für $f(z)$ entsprechend Gleichung 27 ableiten.

5 Satz von LIOUVILLE

LIOUVILLE'S Satz soll hier, etwas anders als z. B. in [WW27, § 5-63], in drei Schritten hergeleitet werden.

1. Soll uns die Frage beschäftigen, ob man eine Supremum (kleinste obere Schranke) für den Betrag des Kurvenintegrals $\int_C f(z) dz$ angeben kann. Dazu gehen wir davon aus, daß $f(z)$ auf dem Integrationsweg C analytisch und mit $\sup_{z \in C} |f(z)| = M < \infty$ beschränkt ist. Liegen also auf C keine Singularitäten, dann gilt folgende Ungleichung [BC03, 37]:

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z)| |dz| \leq \int_a^b M |dz| = M \int_a^b |dz|.$$

²⁷Funktionen, die im Endlichen nur hebbare Singularitäten oder Pole besitzen (also keinen wesentlich singulären Punkt), werden meromorph genannt [Hur00, I-6].

Geht man der besseren Vorstellung halber von einem Integrationsweg in Parameterdarstellung aus, d. h. $z_1 = \varphi(a)$ und $z_2 = \varphi(b)$, dann ist

$$M \int_a^b |dz| = M \int_a^b \left| \frac{dx}{dt} + j \frac{dy}{dt} \right| dt = M \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

wobei letzter Ausdruck genau die Bogenlänge L der Kurve C darstellt. Ist $f(z)$ wie vorausgesetzt auf dem gesamten Integrationsweg analytisch und beschränkt, dann gilt für den Betragswert des Integrals [WW27, § 4·62], [BC03, 41]:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq L \cdot M = L \sup_{z \in C} |f(z)|. \quad (31)$$

2. Sei CAUCHY'S Ungleichung für den Betrag der n -ten Ableitung von $f(z)$ an der Stelle z_0 von Interesse [WW27, § 5·23]. Wir gehen dabei von Beziehung 17, also einem kreisförmigen Integrationsweg mit Radius r um z_0 , aus um deren Wert (bzw. obere Grenze) zu bestimmen.

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{j\theta}) e^{-jn\theta} d\theta \right|$$

Anwendung von Ungleichung 31 führt mit der Länge $L = 2\pi$ und der Abkürzung $M = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$ zu

$$\left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{j\theta}) e^{-jn\theta} d\theta \right| \leq 2\pi \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(z_0 + r e^{j\theta}) e^{-jn\theta}| = 2\pi M$$

und damit direkt weiter zur Relation

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{r^n}. \quad (32)$$

3. Bleibt nur noch der Satz von LIOUVILLE selbst, welcher nach [WW27, § 5·63] folgendermaßen lautet:

Sei $f(z)$ analytisch und beschränkt mit $|f(z)| \leq M < \infty$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (sogar für $z \rightarrow \infty$, also eine *ganze* Funktion), dann ist $f(z)$ eine Konstante.

Der Beweis steckt in Ungleichung 32, denn dort heißt es für $n = 1$

$$\left| \frac{df(z)}{dz} \right| \leq \frac{M}{r}.$$

Läßt man nun $r \rightarrow \infty$ gehen um die gesamte komplexe Ebene einzuschließen, so gilt (unter der wesentlichen Voraussetzung, daß $f(z)$ überall beschränkt sei):

$$\left| \frac{df(z)}{dz} \right| = 0,$$

d. h. $f(z)$ ist konstant.

Interessant ist im Umkehrschluß, daß jede nicht-konstante analytische Funktion Singularitäten besitzen muß. Ansonsten wäre sie entweder nicht beschränkt oder nicht analytisch, würde also die Voraussetzungen nicht erfüllen.

Noch zwei Bemerkungen zum Satz von LIOUVILLE, die seine Bedeutung unterstreichen sollen:

1. In Ungleichung 32 steckt für $n = 0$ das sogenannte Maximumprinzip nach [Cau54, II-6]:

$$|f(z_0)| \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

d. h. der Betrag des Funktionswertes im Punkt z_0 ist immer kleiner oder gleich dem größten Betragswert von $f(z)$ auf dem Kreis mit (irgendeinem) Radius r um z_0 .

2. Der Beweis des Hauptsatzes der Algebra, daß jedes Polynom $p(z)$ mit komplexen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} haben muß, ist mit seiner Hilfe sehr elegant möglich. Denn hätte die Funktion $1/p(z)$ nirgendwo einen Pol (auf \mathbb{C} uneingeschränkt analytisch), dann wäre sie überall beschränkt. Nach LIOUVILLE müßte es sich bei $1/p(z)$ also um eine Konstante handeln, was der Voraussetzung widerspricht, daß $p(z)$ ein nicht-konstantes Polynom ist [FB00, II-3].

6 Lemma von Jordan

Der Hilfssatz von C. JORDAN hat besondere Bedeutung bei komplexen Integralen, die teilweise im Unendlichen verlaufen. Er lautet:

Ist die Funktion $f(z)$ analytisch auf dem Integrationsweg C_∞ nach Abbildung 3 (obere Halbebene) mit $r \rightarrow \infty$ und hat für $\alpha > 0$ die Eigenschaft $\lim_{r \rightarrow \infty} f(z) = 0$ oder für $\alpha = 0$ gleichwertig $\lim_{r \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, dann gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Für den Beweis gehen wir wie in [WW27, § 6.222] von

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz \right| \quad (34)$$

aus und bestimmen eine obere Schranke für den Grenzwert. Wie im ersten Punkt der Herleitung von LIOUVILLE'S Theorem gilt auch hier, daß der Betrag des Integrals kleiner als das Integral über den Betrag (des Integranden) ist.

$$\left| \int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz \right| \leq \int_{C_\infty} |e^{j\alpha z}| \cdot |f(z)| \cdot |dz|$$

Mit der Parameterdarstellung $z = r e^{j\theta} = r \cos \theta + jr \sin \theta$ des Integrationsweges C_∞ , dem zugehörigen Differential $dz = jr e^{j\theta} d\theta$ sowie der Beziehung $e^{j\alpha z} = e^{j\alpha r \cos \theta} e^{-\alpha r \sin \theta}$ ergibt sich schließlich

$$\left| \int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz \right| \leq r \int_0^\pi e^{-\alpha r \sin \theta} |f(r e^{j\theta})| d\theta \leq r \sup_{z \in C_\infty} |f(z)| \int_0^\pi e^{-\alpha r \sin \theta} d\theta. \quad (35)$$

Der Integrand des rechtsseitigen Integrals ist bezüglich des Ordinatenwertes $\theta = \pi/2$ symmetrisch und kann deshalb zu $2 \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin \theta} d\theta$ vereinfacht werden. Weiter kann man für das Intervall $0 \leq \theta \leq \pi/2$ die Ungleichung $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ heranziehen²⁸ und die Relation

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} \alpha r \theta} d\theta \quad (36)$$

ableiten, welche nun bei der Berechnung des (vereinfachten) Integrals verwendet wird.

$$2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} \alpha r \theta} d\theta = -\frac{\pi}{\alpha r} e^{-\frac{2}{\pi} \alpha r \theta} \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{\alpha r} (1 - e^{-\alpha r}) \quad (37)$$

Einsetzen in Ungleichung 35 ergibt die Grenzwerte

²⁸Mit einem Bild des Funktionsverlaufes (wie z. B. in [BC03, 74] oder [Mar95, 10.2] angegeben) ist die Ungleichung sofort einzusehen.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \int_0^\pi e^{-\alpha r \sin \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{\alpha} \quad (\alpha \geq 0) \quad (38)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{\alpha} \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_\infty} |f(z)|, \quad (39)$$

was mehrere Fallunterscheidungen notwendig macht. Gemeinsam ist allen, daß es um Forderungen an die Funktion $f(z)$ mit $z \in C_\infty$ geht (d. h. $z = r e^{j\theta}$), welche ein Verschwinden des letzten Ausdrucks bewirken und dadurch JORDAN's Lemma bestätigen.

1. Im einfachsten Fall, d. h. für $\alpha > 0$ ist sofort ersichtlich, daß $\lim_{r \rightarrow \infty} f(z) = 0$ gelten muß. Außerdem ist erwähnenswert, daß Ungleichung 39 die bekannte Abschätzung $\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{C_\infty} e^{jz} dz \right| \leq \pi$ beinhaltet, welche sich für $\alpha = 1$ und $f(z) = 1$ ergibt.
2. Werte $\alpha < 0$ führen zu folgenden Veränderungen an den bisherigen Formeln:
 - a) In Ungleichung 36 dreht sich das Relationszeichen.
 - b) Bildet man den Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty}$ für Beziehung 37, dann ist das Ergebnis $-\infty$.
 - c) Wegen der beiden vorangegangenen Punkte haben die Ungleichungen 38 und 39 keinen Bestand.

Aus diesem Dilemma kann man sich jedoch durch Drehung des Integrationsweges in die negativ-imaginäre Halbebene (angedeutet in Abbildung 3) befreien. Mit den Grenzen $[\pi, 2\pi]$ und der Substitution $\theta = \phi + \pi$ ist man in der Lage, den Ausgangspunkt nach Ungleichung 35 wiederherzustellen und die Beweisschritte vom Fall $\alpha > 0$ zu übernehmen²⁹.

$$\int_\pi^{2\pi} e^{-\alpha r \sin \theta} d\theta = \int_\pi^{2\pi} e^{|\alpha| r \sin \theta} d\theta = \int_0^\pi e^{-|\alpha| r \sin \phi} d\phi$$

3. Sollte der Exponentialfaktor α jedoch Null sein, dann verschwindet der Nenner auf der rechten Seite von Ungleichung 39 und man muß (schärfer noch) $\lim_{r \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ fordern. JORDAN's Lemma 33 nimmt unter genannten Voraussetzungen die spezielle Form

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_\infty} f(z) dz = 0 \quad (40)$$

²⁹Das Lemma von JORDAN (33) bleibt jedoch immer in seiner ursprünglichen Form erhalten, d. h. α ist in seiner realen Ausprägung einzusetzen.

an.

4. Läßt man (abweichend von der Voraussetzung) ein negativ-imaginäres α zu, dann geht mit $\alpha = -j\beta$ der Betrag des Integrals nach Formel 34 in

$$\left| \int_{C_\infty} e^{\beta z} f(z) dz \right| \leq r \int_0^\pi e^{\beta r \cos \theta} |f(re^{j\theta})| d\theta \leq r \sup_{z \in C_\infty} |f(z)| \int_0^\pi e^{\beta r \cos \theta} d\theta$$

über. Wegen des Cosinus-Terms im Exponenten wird JORDAN'S Lemma hier nicht zutreffen, was aber (wieder) durch Veränderung des Integrationsweges behoben werden kann. Dazu wählt man als Integrationsgrenzen $[\pi/2, 3\pi/2]$ und substituiert $\varphi = \theta - \pi/2$ bzw. $\cos \theta = -\sin \varphi$. Durch den neuen Integrationsweg C'_∞ im Unendlichen (vgl. auch Abbildung 5) wird die ursprüngliche Form von Ungleichung 35 wieder hergestellt, womit der Beweis auf dem gewohnten Weg fortgesetzt werden kann³⁰.

$$\begin{aligned} r \sup_{z \in C_\infty} |f(z)| \int_0^\pi e^{\beta r \cos \theta} d\theta &\Rightarrow r \sup_{z \in C'_\infty} |f(z)| \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} e^{\beta r \cos \theta} d\theta \\ &= r \sup_{z \in C'_\infty} |f(z)| \int_0^\pi e^{-\beta r \sin \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

7 Uneigentliche Integrale

7.1 Anwendung von JORDAN'S Lemma im Fall $\alpha = 0$

7.1.1 Stetige Funktionen

Das Lemma von JORDAN in seiner allgemeinen Form nach Gleichung 33 ermöglicht (unter den angezeigten Voraussetzungen) die Berechnung von uneigentlichen Integralen durch komplexe Integration. Um das Prinzip zu verdeutlichen befassen wir uns zuerst mit dem (einfachen) Spezialfall nach Gleichung 40, welcher die Berechnung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx .$$

unter Umständen wesentlich vereinfacht.

³⁰Sollte jedoch $\alpha = j\beta$ gelten, dann kann dies (wie im reellen Fall) durch Drehung von C'_∞ in die rechte Halbebene kompensiert werden.

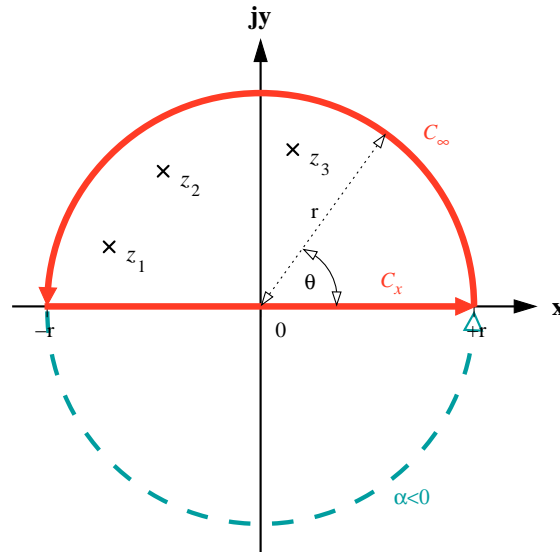


Abbildung 3: Integrationsweg(e) für reelles α

Dazu soll auf dem geschlossenen Weg $C = C_\infty \rightarrow C_x$ nach Abbildung 3 unter Zuhilfenahme des Residuensatzes integriert werden. Nun lassen wir $r \rightarrow \infty$ laufen, was die Residuen aller Singularitäten z_n in der oberen komplexen Halbebene ($\text{Im}(z_n) > 0$) adressiert.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} f(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{C_\infty} f(z) dz}_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \quad (41)$$

Mit JORDAN's Lemma erhält man als Berechnungsvorschrift:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} f(z) . \quad (42)$$

Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ kann also einzig und allein basierend auf der Kenntnis der Residuen (an den Singulärstellen z_n , die oberhalb der reellen Achse liegen) berechnet werden.

Voraussetzungen für die Anwendbarkeit Notwendige Bedingungen für die Anwendbarkeit von Formel 42 sind:

- $f(x)$ ist auf dem Integrationsweg entlang der reellen Achse analytisch (und beschränkt);

- nach JORDAN's Lemma gilt in der oberen Halbebene: $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$;
- das uneigentliche Integral konvergiert [WW27, § 6-22].

Kann man sogar absolute Konvergenz, d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ nachweisen, dann ist wegen

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (43)$$

der letzte Punkt der notwendigen Bedingungen (gewöhnliche Konvergenz) grundsätzlich erfüllt [WW27, § 4-43].

Die Eigenschaft der absoluten Konvergenz kann für ganz bestimmte Klassen von Funktionen generell nachgewiesen werden, wovon eine z. B. die mit der "Abkling"-Charakteristik

$$|z^\sigma f(z)| \leq M < \infty \quad \text{bzw.} \quad |f(x)| \leq M |x|^{-\sigma}, \quad \sigma > 1$$

ist [GKH⁺79, 20.2]. Wir betrachten also die Beschränktheit von $|x^\sigma f(x)|$ unter der Maßgabe, daß sich eine Zahl $\sigma(x) > 1$ (wie gefordert) für jeden Wert $x > \alpha$ finden läßt. Ist dem so, dann gilt im offenen Intervall $\alpha > 0$ die Relation

$$\int_{\alpha}^{\infty} |f(x)| dx \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^r M x^{-\sigma} dx$$

und mit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^r M x^{-\sigma} dx = M \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\sigma} x^{1-\sigma} \Big|_{\alpha}^r = \frac{M}{1-\sigma} \lim_{r \rightarrow \infty} (r^{1-\sigma} - \alpha^{1-\sigma}) = \frac{M}{\sigma-1} \alpha^{1-\sigma}$$

kann die absolute Konvergenz entlang des positiven Teils der reellen Achse ($x > 0$) nachgewiesen werden³¹.

$$\int_{+0}^{\infty} |f(x)| dx \leq \frac{M}{\sigma-1} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{1-\sigma} < \infty$$

Gleichzeitig wird die Bedingung von JORDAN's Lemma erfüllt, denn:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |z f(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z^{1-\sigma} f(z) z^\sigma| \leq M \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{1-\sigma} = 0.$$

³¹Der Nachweis läßt sich für das Integral $\int_{-\infty}^{-0} |f(x)| dx$ gleichermaßen führen.

In ähnlicher Art und Weise ist bei exponentiell abfallenden Funktionen die absolute Konvergenz dadurch gegeben, daß sie (wenn eine Zahl $\sigma(x) > 1$ existiert) für $|x| \rightarrow \infty$ die Ungleichung $|e^{\sigma|x}| f(x)| \leq M < \infty$ erfüllen³². Denn setzt man diese Relation in Ungleichung 43 ein

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} M e^{-\sigma|x|} dx$$

und löst das rechtsseitige Integral auf,

$$\int_{-\infty}^{\infty} M e^{-\sigma|x|} dx = 2M \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} dx = -\frac{M}{\sigma} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\sigma x} \Big|_0^T = \frac{M}{\sigma} \left(1 - \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\sigma T}\right) = \frac{M}{\sigma}$$

so wird die Beschränktheit des Ergebnisses erkennbar.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq \frac{M}{\sigma} < \infty$$

7.1.2 Gebrochen rationale Funktionen

Speziell für gebrochen rationale Funktionen ist es durch Hinzunahme von Beziehung 30 möglich, noch folgende Vereinfachung anzugeben (vorausgesetzt alle Pole sind von erster Ordnung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \frac{p(z_n)}{q'(z_n)}.$$

Die Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ kann man bei (echt) gebrochen rationalen Funktionen dahingehend konkretisieren, daß der Grad des Nennerpolynoms $q(x)$ um mindestens zwei größer als der des Zählerpolynoms $p(x)$ sein muß.

7.1.3 Halb-analytische Funktionen

Oben halbanalytische Funktionen Für eine in der oberen komplexen Halbebene³³ analytische Funktion $f(z)$ kann man unter bestimmten Voraussetzungen jeden Funktionswert im

³²Der Abfall der Funktionswerte erfolgt hier wegen $e^{\sigma x} > x^\sigma = e^{\sigma \ln x}$ noch schneller als bei Funktionen, die durch $|x^\sigma f(x)| \leq M$ beschränkt sind (wenn $x \rightarrow \infty$ strebt).

³³Als *halbanalytisch* sollen Funktionen bezeichnet sein, die in *einer* Halbebene von \mathbb{C} uneingeschränkt analytisch sind.

Gebiet $\text{Im}(z) > 0$ durch Integration entlang der reellen Achse berechnen. Dazu soll (wie bei der Herleitung von CAUCHY's Integralformel 14) eine neue Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (44)$$

definiert sein, für die wir zunächst das Residuum an der (einzigen) Singularität z_0 bestimmen (vgl. Formel 29).

$$\text{res}_{z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) \frac{f(z)}{z - z_0} \right] = f(z_0)$$

Einsetzen in den Ausgangspunkt des allgemeinen Falls ($\alpha = 0$) nach Gleichung 41 führt mit dem Integrationsweg laut Abbildung 3 zu:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_C g(z) dz = 2\pi j f(z_0) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{C_\infty} g(z) dz}_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx.$$

Im Ergebnis erhält man CAUCHY's Integralformel³⁴ in der Halbebene $\text{Im}(z_0) > 0$ nach [BC03, 119].

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx, \quad \text{Im}(z_0) > 0 \quad (45)$$

Rechts halbanalytische Funktionen Sollte $f(z)$ entgegen der bisherigen Ausführungen im Gebiet $\text{Re}(z_0) > 0$ analytisch sein, dann integriert man auf einem Halbkreis in der rechten Halbebene entsprechend Abbildung 5. Die einzige Singularität z_0 liegt (wieder) innerhalb der Kurve $C = C_y \rightarrow C_\infty$ und hat, nimmt man CAUCHY's Integralformel 13 sowie Gleichung 21 zu Hilfe³⁵, das Residuum

$$\text{res}_{z_0} g(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

³⁴Benennt man z_0 in z und außerdem die Integrationsvariable um, so kommt man zu der üblichen Darstellung $f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$. Um jedoch Mehrdeutigkeiten zu vermeiden wird (außer in Tabelle 1) die Schreibweise mit z_0 beibehalten.

³⁵Denn Beziehung 45 ist augenscheinlich ein Spezialfall von CAUCHY's Integralformel 14 für den im Unendlichen verlaufenden Integrationsweg $C = C_x \rightarrow C_\infty$ nach Abbildung 3.

Nach dem Residuensatz (und bei Anwendung von JORDAN's Lemma für den Fall eines positiv imaginären α , vgl. Abschnitt 6) ergibt sich daraus

$$\int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{C_y} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = - \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi j \operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi j f(z_0)$$

und somit für den Funktionswert an der Stelle z_0 :

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad \operatorname{Re}(z_0) > 0. \quad (46)$$

Nimmt man noch die Ersetzung $z = jy$ vor, so läßt sich die Integration entlang der imaginären Achse auf eine reelle Integrationsvariable abbilden (siehe auch Tabelle 1).

$$f(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(jy)}{jy-z_0} dy, \quad \operatorname{Re}(z_0) > 0 \quad (47)$$

Abhängigkeit zwischen Real- und Imaginärteil Gehen wir jetzt nocheinmal zum Fall $\operatorname{Im}(z_0) > 0$, d. h. in die obere Halbebene³⁶ zurück und betrachten Formel 45 mit Blick auf die Lage von z_0 . Nehmen wir (im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen) an, der Punkt z_0 läge in der unteren Halbebene und bezeichnen ihn der besseren Unterscheidbarkeit wegen mit $z_1 = x_1 + jy_1$. Aufgrund des Fehlens von Singularitäten innerhalb der Kurve C (siehe Abbildung 3, f ist in der oberen Halbebene als analytisch vorausgesetzt), muß nach dem Satz von CAUCHY das Integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_1} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-z_1} dx = 0$$

verschwinden. Bringt man diese Gleichung in Zusammenhang mit dem Punkt z_0 nach Formel 45 auf einen gemeinsamen Nenner,

³⁶Weitere Varianten bezüglich der Halbebenen, in denen $f(z)$ analytisch ist, sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx & 0 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_1} dx \\
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - z_1)f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx & 0 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - z_0)f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx
\end{aligned}$$

so lässt sich aus der rechtsseitigen Beziehung ³⁷ die Äquivalenz

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0 f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx \quad (48)$$

ermitteln. Deshalb kann man für den Funktionswert an der Stelle z_0 schreiben:

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx - \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1 f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0 f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx - \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_1 f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx \\
&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z_1)f(x)}{(x - z_0)(x - z_1)} dx .
\end{aligned}$$

Wählt man den Punkt z_1 jetzt noch (gezielt) als Spiegelung von z_0 an der reellen Achse ($z_1 = x_0 - jy_0 = z_0^*$), so ergibt einfaches Einsetzen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z_0^*)f(x)}{(x - z_0)(x - z_0^*)} dx = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z_0 - z_0^*)f(x)}{(x - z_0)(x - z_0)^*} dx,$$

was zu folgenden Berechnungsformeln für $f(z_0)$ führt [BC03, 119]:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 f(x)}{|x - z_0|^2} dx = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - x_0)f(x)}{|x - z_0|^2} dx, \quad y_0 > 0 . \quad (49)$$

Durch Einsetzen von $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ lassen sich außerdem die Darstellungsformen

³⁷Welche die Austauschbarkeit von $z_0 = x_0 + jy_0$ durch x sowie y_0 durch $j(x_0 - x)$ im Zähler des Integranden anzeigt.

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 u(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 v(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx \quad (50)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)v(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx + \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)u(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx \quad (51)$$

gewinnen, wobei die Realteil-Beziehung auch Poisson's Integralformel für die Halbebene genannt wird³⁸. Durch getrennte Betrachtung von Real- und Imaginärteil erhält man daraus die Formeln

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 u(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)v(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx \quad (52)$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 v(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0)u(x, 0)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx, \quad (53)$$

welche durch Einsetzen in 50 und 51 die Berechnung des Funktionswertes $f(z_0) = u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0)$ aus den Randwerten nur einer Komponente ermöglichen.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 - j(x-x_0)}{|x-z_0|^2} u(x, 0) dx & f(z_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x_0) + jy_0}{|x-z_0|^2} v(x, 0) dx \\ &= \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-z_0)^*}{|x-z_0|^2} u(x, 0) dx & &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-z_0)^*}{|x-z_0|^2} v(x, 0) dx \\ &= \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{x-z_0} dx & &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0)}{x-z_0} dx \end{aligned} \quad (54)$$

Letztere Beziehungen eröffnen in Verbindung mit Gleichung 5 außerdem die Möglichkeit der Differentiation von $f(z)$ an jeder Stelle z_0 mit $\text{Im}(z_0) > 0$ ausgehend von den Randwerten nur einer Komponente³⁹.

³⁸Die klassische Darstellung des Poisson-Integrals wird in der Literatur oft in Polarkoordinaten gegeben, wodurch der Integrationsweg entlang der reellen Achse zu einem Kreis um den Koordinatenursprung wird [BC03, 116], [AG54, n° 59], [Cau32]. Dazu setzt man typischerweise $x = -\tan(\theta/2) = -j \frac{1-e^{j\theta}}{1+e^{j\theta}} = -j \frac{1-w}{1+w}$ und geht durch Bilinear-Transformation $z_0 = -j \frac{1-w_0}{1+w_0}$ zu einem Polarkoordinatensystem über.

³⁹Bei Gleichung 55 handelt es sich offensichtlich um einen Spezialfall von Ableitungsformel 15 für halbanalytische Funktionen (auf einem Integrationsweg entlang der reellen Achse).

Tabelle 1: Berechnungsformeln für halbanalytische Funktionen

Bedingung	$f(z) =$		
$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) > 0}} f(z) = 0$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ $-\frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(j\xi)}{j\xi - z} d\xi$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)}{ \xi - z ^2} d\xi$ $\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x) f(\xi)}{ \xi - z ^2} d\xi$	$\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[f(\xi)]}{\xi - z} d\xi$ $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[f(\xi)]}{\xi - z} d\xi$
$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) < 0}} f(z) = 0$	$-\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(j\xi)}{j\xi - z} d\xi$	$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)}{ \xi - z ^2} d\xi$ $-\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x) f(\xi)}{ \xi - z ^2} d\xi$	$-\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[f(\xi)]}{\xi - z} d\xi$ $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[f(\xi)]}{\xi - z} d\xi$
$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Re}(z) > 0}} f(z) = 0$	$-\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ $-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\xi)}{j\xi - z} d\xi$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(j\xi)}{ j\xi - z ^2} d\xi$ $-\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - y) f(j\xi)}{ j\xi - z ^2} d\xi$	$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[f(j\xi)]}{j\xi - z} d\xi$ $\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[f(j\xi)]}{j\xi - z} d\xi$
$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Re}(z) < 0}} f(z) = 0$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\xi)}{j\xi - z} d\xi$	$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x f(j\xi)}{ j\xi - z ^2} d\xi$ $\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - y) f(j\xi)}{ j\xi - z ^2} d\xi$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}[f(j\xi)]}{j\xi - z} d\xi$ $-\frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}[f(j\xi)]}{j\xi - z} d\xi$

$$\frac{df(z_0)}{dx_0} = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\frac{u(x, 0)}{x - z_0} \right] dx = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{(x - z_0)^2} dx \quad (55)$$

Grenzfälle

1. Sollte JORDAN's Lemma wegen $\lim_{r \rightarrow \infty} f(z) \neq 0$ einmal nicht anwendbar sein, dann muß das Integral $\int_{C_\infty} f(z)/(z - z_0) dz$ für $r \rightarrow \infty$ berücksichtigt werden. Nehmen wir beispielhaft den Fall der rechtsseitig halbanalytischen Funktionen, dann hilft die Substitution $z - z_0 = r e^{j\theta}$ mit $dz = j r e^{j\theta} d\theta$ weiter.

$$2\pi j f(z_0) = \int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z_0 + r e^{j\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Für den Spezialfall $f(z) = 1$ kann man durch formales Einsetzen

$$\begin{aligned} \int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz &= \frac{1}{2\pi j} j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{dz}{z-z_0} = 1 \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{dz}{z-z_0} &= \frac{1}{2\pi} \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 1 \end{aligned}$$

das uneigentliche Integral

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{dz}{z-z_0} = -j\pi, \quad x_0 > 0 \quad (56)$$

ermitteln und dadurch auch $\int_{C_\infty} (z-z_0)^{-1} dz = j\pi$ für $\text{Re}(z_0) > 0$ verifizieren.

2. Alle Ausführungen zu analytischen Funktionen in der rechten Halbebene haben sich bisher auf Funktionswerte mit $\text{Re}(z_0) > 0$ beschränkt. Interessant z. B. für den Zusammenhang zwischen der FOURIER- und LAPLACE-Transformation sind aber auch die Funktionswerte auf der imaginären Achse $\text{Re}(z_0) \rightarrow 0$. Dazu soll die Funktion $f(z)/(z-z_0)$ auf dem Integrationsweg entsprechend Abbildung 4 betrachtet werden.

Wegen der Holomorphieeigenschaft in der rechten Halbebene muß nach dem Satz von CAUCHY folgendes gelten:

$$\int_{C_\infty} -\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\int_{-j\infty}^{j(y_0-\varepsilon)} + \int_{j(y_0+\varepsilon)}^{j\infty} + \int_{C_\varepsilon} \right] = 0.$$

Das Integral auf dem Weg C_∞ verschwindet nach JORDAN's Lemma für $r \rightarrow \infty$, wenn $\lim_{r \rightarrow \infty} f(z) = 0$ angenommen werden kann. Die beiden Teilintegrale auf dem geraden Integrationsweg entlang der imaginären Achse stellen für $\varepsilon \rightarrow 0$ genau einen CAUCHY'schen Hauptwert dar, was ihre Zusammenfassung ermöglicht.

$$\text{V. P.} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad (57)$$

Mit der Substitution $z-z_0 = \varepsilon e^{j\theta}$, welche die gewünschte Integrationskurve verkörpert, nimmt das Integral auf dem Weg C_ε die Darstellung

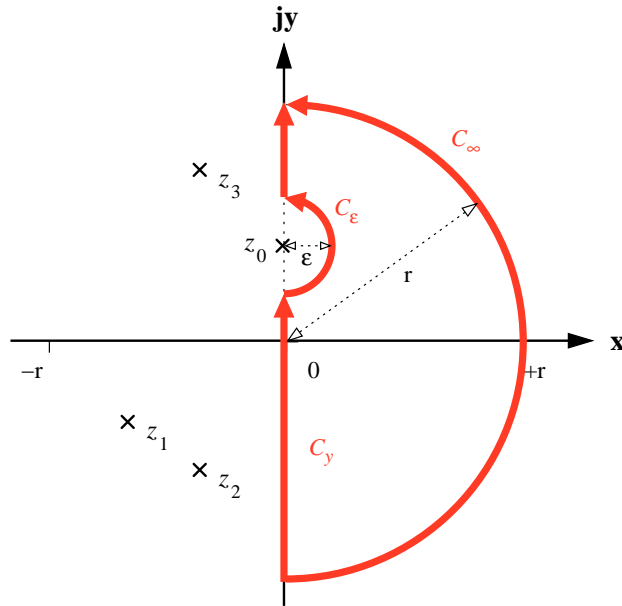


Abbildung 4: Integrationsweg mit Singularität auf imaginärer Achse

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z_0 + \epsilon e^{-j\theta}) d\theta$$

an. Bildet man den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$, so geht es (Stetigkeit von f bei z_0 vorausgesetzt) in

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = j f(z_0) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = j\pi f(z_0) \quad (58)$$

über, was sich auch als Spezialfall von CAUCHY'S Integralformel 13 deuten läßt⁴⁰. Einsetzen in unser Zwischenergebnis 57 ergibt⁴¹

$$\text{V. P.} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = -j\pi f(z_0)$$

und deshalb

⁴⁰Formel 58 impliziert für den Fall eines einfachen Pols z_0 auf der imaginären Achse: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(z) dz = j\pi \text{res}_{z_0} f(z)$ und entspricht damit dem Ergebnis in [BC03, 75] für eingerückte Pfade (unter gleichen Bedingungen auf der reellen Achse).

⁴¹Sollte JORDAN'S Lemma nicht anwendbar sein, so gilt: $j\pi f(z_0) = \int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \text{V. P.} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

$$f(jy_0) = \frac{j}{\pi} \text{V. P.} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{f(z)}{z - jy_0} dz = \frac{j}{\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(jy)}{y - y_0} dy \quad (59)$$

für Punkte auf der imaginären Achse. Im Vergleich mit den für $\text{Re}(z_0) > 0$ gültigen Beziehungen (insbesondere dem Äquivalent zu 49 in Tabelle 1) läßt sich feststellen, daß der Grenzübergang

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} f(z_0) = \frac{j}{\pi} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y_0)f(jy)}{|jy - z_0|^2} dy = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(jy)}{y - y_0} dy, \quad \text{Re}(z_0) \geq 0$$

genau mit dem Ergebnis für $\text{Re}(z_0) = 0$ übereinstimmt.

3. Auf der Grundlage von Formel 59 kann man zeigen, daß Real- und Imaginärteil einer rechts halbanalytischen Funktion (entlang der imaginären Achse) über die HILBERT-Transformation⁴² verknüpft sind [Bra03, 13]. Die Behauptung ist unmittelbar zu verifizieren, wenn man $f(jy_0)$ in Real- und Imaginärteil separiert

$$u(0, y_0) + jv(0, y_0) = -\frac{1}{\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(0, y)}{y - y_0} dy + \frac{j}{\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0, y)}{y - y_0} dy$$

und beide Seiten der Gleichung betrachtet.

$$u(0, y_0) = -\frac{1}{\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(0, y)}{y - y_0} dy = \mathcal{H}\{v(x_0, 0)\}$$

$$v(0, y_0) = \frac{1}{\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0, y)}{y - y_0} dy = -\mathcal{H}\{u(x_0, 0)\}$$

Voraussetzungen für die Anwendbarkeit Eine wesentliche Voraussetzung für das Verschwinden des Integrals auf dem Integrationsweg C_∞ nach Abbildung 3 war nach dem Lemma von JORDAN: $\lim_{r \rightarrow \infty} z g(z) = 0$. Für Funktionen, die in einer Halbebene uneingeschränkt analytisch sind, reduziert sich die Forderung allgemein auf

⁴²Wie in [PP02, 9], [Mar95, 5.1] und [Fri85, 4] wird die HILBERT-Transformationen durch $\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi$ definiert.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| z \frac{f(z)}{z - z_0} \right| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{1 - z_0/z} \right| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0.$$

Zu beachten ist dabei, daß $|z| \rightarrow \infty$ je nach Verlauf des halbkreisförmigen Integrationsweges noch mit einer anderen Bedingung, den Real- oder Imaginärteil von z betreffend, zu kombinieren ist (vgl. Tabelle 1).

Weitere Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Berechnungsformeln bestehen darin, daß $f(z)$ auf dem jeweiligen Integrationsweg analytisch (sowie beschränkt) und das zugeordnete Integral konvergent sein muß (siehe auch Abschnitt 7.1.1).

7.2 Anwendung von JORDAN'S Lemma im Fall $\alpha \neq 0$

Um JORDAN'S Lemma in seiner allgemeinen Form anzuwenden, wollen wir den Prozeß jetzt etwas umdrehen und zuerst eine komplexe Funktion $w(z) = e^{j\alpha z} f(z)$ definieren. Im nächsten Schritt soll versucht werden, das Integral $\oint_C w(z) dz$ auf der geschlossenen Kurve $C = C_\infty \rightarrow C_x$ nach Abbildung 3 für den Grenzfall $r \rightarrow \infty$ zu evaluieren.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_C w(z) dz = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} w(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz}_0 + \int_{z=-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz$$

Ausgehend von dem Ergebnis

$$2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} [e^{j\alpha z} f(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz, \quad (60)$$

wobei z_n wieder die Pole (isolierte Singularitäten) der Funktion $w(z)$ repräsentiert, kann man jetzt noch in Gleichungen für den Real- und Imaginärteil separieren.

$$\begin{aligned} -2\pi \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{Im} \{ \text{res}_{z_n} [e^{j\alpha z} f(z)] \} &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz \\ 2\pi \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{Re} \{ \text{res}_{z_n} [e^{j\alpha z} f(z)] \} &= \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz \end{aligned}$$

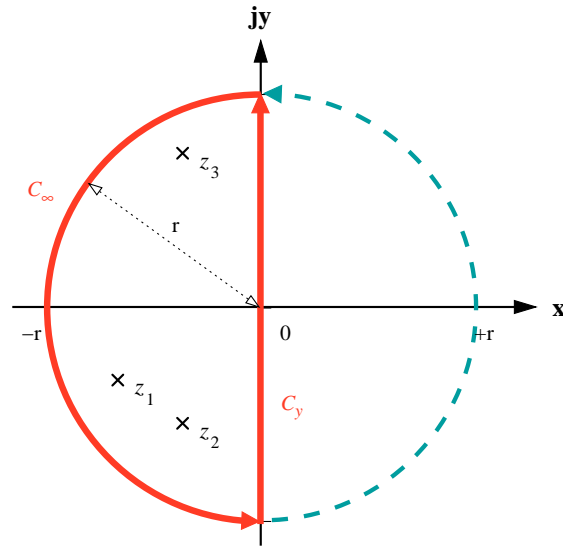


Abbildung 5: Integrationsweg(e) für imaginäres α

Was hier als Ergebnis präsentiert wurde, hat (insbesondere Formel 60 betreffend) besondere Bedeutung für die inverse LAPLACE-Transformation [BC03, 81], [Sto92, 2.4.4], [Wun62, 2.22]. Unter anderem wird für die Voraussetzung $\alpha > 0$ von JORDAN's Lemma deutlich, daß sich das Konvergenzverhalten des rechtsseitigen Integrals wegen der abgeschwächten Forderung $\lim_{r \rightarrow \infty} f(z) = 0$ deutlich verbessert.

Die bis hierher gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Integration entlang der x -Achse lassen sich auch auf den Weg entlang der y -Achse entsprechend Abbildung 5 anwenden [Wun62, 2.32]. Da nach dem Lemma von JORDAN auch in diesem Fall das Integral auf dem Weg C_∞ verschwindet (vgl. letzter Absatz in Abschnitt 6, wenn α negativ-imaginär ist), wird das uneigentliche Integral mit Hilfe der Singularitäten in der linken Halbebene berechenbar.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_C w(z) dz = 2\pi j \sum_{\operatorname{Re}(z_n) < 0} \operatorname{res}_{z_n} g(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{C_\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz}_0 + \int_{z=-j\infty}^{j\infty} e^{\beta z} f(z) dz$$

$$\int_{z=-j\infty}^{j\infty} e^{\beta z} f(z) dz = 2\pi j \sum_{\operatorname{Re}(z_n) < 0} \operatorname{res}_{z_n} [e^{\beta z} f(z)], \quad \beta > 0 \quad (61)$$

Für die Fälle von JORDAN's Lemma mit negativem α (egal ob reell oder imaginär, vgl. Abschnitt 6) ist der entsprechende Weg C_x bzw. C_y negativ anzusetzen, wenn die ganze Kurve C

betrachtet wird. Aus diesem Grund sind entweder die Integrationsgrenzen oder das Vorzeichen des reellen/imaginären Integrals umzukehren.

Tabelle 2 gibt einen Überblick, was die Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von JORDAN'S Lemma betrifft. Interessant ist speziell für den Fall $\alpha = 0$, daß es danach eine Verbindung zwischen den Residuen der Pole in der oberen und unteren bzw. linken und rechten Halbebene gibt:

$$\sum_{\text{Im}(z_n) > 0} [\text{res}_{z_n} f(z)] = - \sum_{\text{Im}(z_n) < 0} [\text{res}_{z_n} f(z)] .$$

Tabelle 2: Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von Residuen

α	Berechnungsvorschrift	Voraussetzung
pos.-reell	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha z} f(z) dz = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} [e^{j\alpha z} f(z)]$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) > 0}} f(z) = 0$
neg.-reell	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \alpha z} f(z) dz = -2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) < 0} \text{res}_{z_n} [e^{-j \alpha z} f(z)]$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) < 0}} f(z) = 0$
pos.-imag.	$\int_{-j\infty}^{j\infty} e^{- \alpha z} f(z) dz = -2\pi j \sum_{\text{Re}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} [e^{- \alpha z} f(z)]$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Re}(z) > 0}} f(z) = 0$
neg.-imag.	$\int_{-j\infty}^{j\infty} e^{ \alpha z} f(z) dz = 2\pi j \sum_{\text{Re}(z_n) < 0} \text{res}_{z_n} [e^{ \alpha z} f(z)]$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Re}(z) < 0}} f(z) = 0$
0	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) > 0}} z f(z) = 0$
0	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi j \sum_{\text{Im}(z_n) < 0} \text{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Im}(z) < 0}} z f(z) = 0$
0	$\int_{-j\infty}^{j\infty} f(y) dy = -2\pi j \sum_{\text{Re}(z_n) > 0} \text{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Re}(z) > 0}} z f(z) = 0$
0	$\int_{-j\infty}^{j\infty} f(y) dy = 2\pi j \sum_{\text{Re}(z_n) < 0} \text{res}_{z_n} f(z)$	$\lim_{\substack{ z \rightarrow \infty \\ \text{Re}(z) < 0}} z f(z) = 0$

Literatur

- [AG54] ACHIESER, N. I. und I. M. GLASMANN: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*. Akademie-Verlag, Berlin, 1954.

- [BC03] BROWN, JAMES WARD und RUEL V. CHURCHILL: *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, 7. Auflage, 2003.
- [Bra03] BRACEWELL, RONALD N.: *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 3. Auflage, 2003.
- [Cau32] CAUER, WILHELM: *The Poisson integral for functions with positive real part*. Bulletin of the American Mathematical Society, 38(10):713–717, 1932.
- [Cau54] CAUER, WILHELM: *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1954.
- [FB00] FREITAG, EBERHARD und ROLF BUSAM: *Funktionentheorie 1*. Springer, 3. Auflage, 2000.
- [Fri85] FRITZSCHE, GOTTFRIED: *Signale und Funktionaltransformationen*. Verlag Technik, Berlin, 1985.
- [GKH⁺79] GELLERT, W., DR. H. KÜSTNER, DR. M. HELLWICH, H. KÄSTNER et al.: *Kleine Enzyklopädie Mathematik*. Bibliographisches Institut Leipzig, 11. Auflage, 1979.
- [Hur00] HURWITZ, ADOLF: *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Springer, Berlin Heidelberg New York Barcelona Hongkong London Mailand Paris Singapur Tokio, 5. Auflage, 2000.
- [Kör88] KÖRNER, T.W.: *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 1988.
- [Mar95] MARKO, HANS: *Systemtheorie*. Springer, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest, 3. Auflage, 1995.
- [Nee97] NEEDHAM, TRISTAN: *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, New York, 1997.
- [Pap62] PAPOULIS, ATHANASIOS: *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill Electronic Sciences Series. McGraw-Hill, New York, San Francisco, London, Toronto, 1962.
- [PP02] PAPOULIS, ATHANASIOS und S. UNNIKRISHNA PILLAI: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, 4. Auflage, 2002.
- [Sto92] STOPP, F.: *Operatorenrechnung*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 5. Auflage, 1992.

- [Wun62] WUNSCH, GERHARD: *Moderne Systemtheorie*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1962.
- [WW27] WHITTAKER, E. T. und G. N. WATSON: *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 4. Auflage, 1927. (Reprinted 1999).

Index

Algebra

Hauptsatz der, 25

Analytizität, 18

CAUCHY

Integralformel in der Halbebene, 32

Integralformel von, 13

–RIEMANN'sche Differentialgl., 3

Satz von, 10, 24

Ungleichung von, 24

Verallg. Integralformel von, 15

Differenzierbarkeit, 3

Funktion

analytische, 18

Ableitung, 14

Beschränktheit, 20, 23

Funktionswert, 11

Holomorphie, 3, 18

Kurvenintegral, 10

exponentiell abfallende, 31

ganze, 3, 24

gebrochen rationale, 22, 31

halbanalytische, 31

harmonische, 5

meromorphe, 23

Potential-, 5

reguläre, 5

Funktionaldeterminante, 5

Funktionentheorie, 3–42

Hauptsatz der, 10

Hebbarkeitsatz, 20

Holomorphie, 3

Integrabilitätsbedingung, 3, 8

Integral

Beschränktheit, 31

-formel von CAUCHY, *siehe* CAUCHY

Konvergenz, 30

Kurven-, 9

-rechnung

Hauptsatz der, 9

Stammfunktion, 8

unbestimmtes, 8, 9

uneigentliches, 28–42

Wegunabhängigkeit, 9

JACOBI-Determinante, *siehe* Funktionaldeterminante

JORDAN, Lemma von, 25, 28, 40

Konvergenz, 40

absolute, 30

gewöhnliche, 30

Kurvenintegral, 10

LAPLACE

-Gleichung, 5

-Transformation, 37, 41

LAURENT-Reihe, 16

Hauptteil, 17, 20, 21

Regulärteil, 17

Residuum, 17

LILOUVILLE, Satz von, 23

MACLAURIN-Reihe, 18

Maximumprinzip, 25

Mittelwerteigenschaft, 16

MORERA, Satz von, 11

POISSON
-Formel (für die Halbebene), 35
-Integral, 35
Pol, 20
 erster Ordnung, 31
 Ordnung, 20
 Vielfachheit, 21
Potentialfunktionen, 5
Potenzreihe, 3, 16, 18, 21

Randwerte, 14, 35
Residuensatz, 18
Residuum, 17
 eines Pols, 21
RIEMANN'scher Hebbarkeitssatz, 20

Satz von
 CAUCHY, *siehe* CAUCHY
 JORDAN, *siehe* JORDAN
 LIOUVILLE, *siehe* LIOUVILLE
 SCHWARZ, *siehe* SCHWARZ
SCHWARZ, Satz von, 4
Singularitäten, 19
 hebbare, 13, 20
 Pole, 20
 wesentliche, 23
Stammfunktion, 8

TAYLOR-Reihe, 18, 21
Transformation
 Bilinear-, 35
 HILBERT-, 39
 LAPLACE-, 37, 41

Umkehrfunktion, 5
Uneigentliche Integrale, 28–42

Wegunabhängigkeit, 9